Atelier « Fractions et nombres décimaux »

Séminaire national pour l'enseignement des mathématiques à l'école primaire
Poitiers - Septembre 2017

Remarques (qui pourront être évoquées lors d'une synthèse portant sur les clés d'une progression de cycle pertinente)

• Les situations ci-dessous permettent d'évoquer la **progression chronologique** : fractions→fractions décimales→ décimaux (cf repères de progressivité)

• Une même situation pourra être placée à différents moments sur le cycle : idée de **rebrassage/enrichissement/retroaction** permettant de montrer l'apprentissage autrement que comme des étapes successives et sans lien les unes avec les autres (traitement des fractions/fractions décimales/nombres décimaux de façon trop segmentée)

• On peut analyser ces activités sous la focale des **compétences** développées, en particulier la compétence **représenter** : produire et utiliser diverses représentations des fractions simples et des nombres décimaux.
Ce peut être l'occasion de montrer en quoi cette compétence est essentielle dans la construction du sens du nombre.

• Les situations ont été choisies afin de montrer des **liens avec d'autres domaines** (calcul, grandeurs et mesures, calcul en ligne)

• Les situations ont été choisies afin de montrer des **modalités différentes** (problème d'introduction, jeu, travail sur l'erreur, exercice rituel, travaux de groupe…), permettant d'étaler l'apprentissage dans le temps et de construire des **automatismes**.

• Certaines situations permettent de mettre en avant l'importance de l'**oralisation**

• Certaines situations montrent comment on continue à travailler le principe de numération, les fractions, les fractions décimales alors qu'on a déjà abordé l'écriture à virgule (parfois repoussé en fin d'année si l'enseignant estime que les pré requis ne sont pas maitrisées)

• Certaines activités sont assez riches pour permettre de **différencier** (programmation de l'enseignant/parcours de l'élève)

Situation 1 : Calcul en ligne

a) Calcule « 2 dizaines et 3 unités + 3 dizaines et 9 unités » *(consigne orale)*

b) Calcule « deux unités et 3 dixièmes + trois unités et 9 dixièmes » *(consigne orale)*

c) Quel est le nombre entier compris entre $\frac{328}{100}$ et 43 dixièmes ?

d) Calculer 3 fois $\frac{42}{10}$

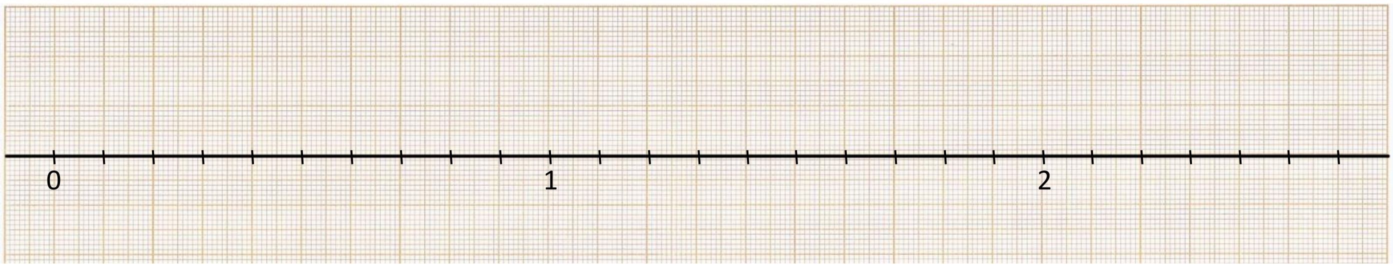
- ➢ oralisation (questions a et b), travail sur 12 dixièmes = 10 dixièmes + 2 dixièmes = 1 unité + 2 dixièmes
Compétence représenter (oral/écriture en ligne/écriture formelle). L'oral met l'accent sur la compréhension en évitant la difficulté du formalisme de l'écrit.
- ➢ Continuité dans le travail sur les entiers et celui sur les décimaux (questions a et b)

➢ Question c) Dans 328/100, il y 3 unités entières + des morceaux d'unité ; dans 43 dixièmes, il y a 4 unités entières et des morceaux d'unité, donc le nombre cherché est 4 ; travail sur le sens du nombre sans entrer dans des décompositions formelles.
➢ Travail sur la distributivité en actes (question d). Réponse 126/10 bien sur acceptée. Le travail peut ensuit être mené pour proposer d'autres écritures de ce nombre (mise en commun des réponses) : passage progressif d'une écriture à l'autre (compétence représenter)
➢ Exercices ritualisés pour construire des automatismes tout en travaillant sur le sens
➢ Différenciation possible (question bonus, différents niveaux proposés au choix, quantité variable de calculs donnés…)
➢ Situation qui convient pour tout le cycle : idée d'augmenter progressivement la difficulté.
➢ Lien entre la numération et le calcul (préparation de 3 × 4,2 question d)

Voir aussi document ressource sur le calcul en ligne

Situation 2 : Droite graduée

Placer le nombre 163 centièmes sur cette droite graduée. Donne plusieurs façons différentes d'écrire ce nombre.



➢ Travail sur l'unité (repérage), puis sur le sens des graduations (unités partagées en 10, donc chaque graduation représente 1/10) : fraction partage.
➢ Oralisation des explications
➢ Travail sur le dixième du dixième = 1/100
➢ Mise en œuvre de la compétence « représenter » (différentes écritures du nombre) s'appuyant sur le sens

Situation 3 : Ficelle

Voici un morceau de ficelle.
En prenant cette ficelle comme unité,
estimez les dimensions de votre table (largeur, longueur, hauteur).
(Variante : on peut utiliser une bande de papier au lieu d'une ficelle)

➢ Activité permettant d'introduire la notion de fraction, en montrant l'insuffisance des nombres entiers pour mesurer une longueur ; ou permettant de revisiter la notion de fraction simple

Situation 4 : Nombres à construire

Travail de groupe.
Voici des unités partagées de différentes façons et une carte sur laquelle est écrit un nombre. Construire le nombre à l'aide des unités, que l'on peut découper à sa guise. Coller le nombre ainsi construit sur l'affiche.

➢ Voir document ressource, où la situation est largement détaillée.
➢ Activité permettant de revisiter les écritures fractionnaires et/ou l'écriture décimale selon le moment du cycle.
➢ Différenciation possible : degré de complexité des nombres/écritures en jeu ; nombres de cartes distribuées à chaque groupe.

➢ Travail sur le sens : les écritures décimales et fractionnaires sont retravaillées à l'aide de la fraction partage. Lien entre les différentes unités de numération (10 dixièmes = 1 unité par exemple)
➢ Travail sur l'erreur dans les groupes et lors de la synthèse collective
➢ Oralisation des procédures lors des phases d'échanges dans les groupes et lors de la synthèse.
Situation proposée en annexe du document ressource

Situation 5 : Exposé
Travail de groupe pouvant être initié en classe (recherches à partir d'un panel de ressources laissées à disposition) et terminé à la maison (réalisation d'une affiche).

Chaque groupe prépare une affiche sur l'un des systèmes de numération suivant :

♦ **les mésopotamiens et l'écriture cunéiforme :**
La naissance des nombres (entailles, noeuds). Quels étaient les supports utilisés pour écrire et calculer ? [tablettes d'argile et calculi]. Qu'est-ce que l'écriture cunéiforme ? Le zéro existait-il ? Expliquer le fonctionnement de la base 60. Expliquer comment écrire 7 435. Carte géographique, frise chronologique.

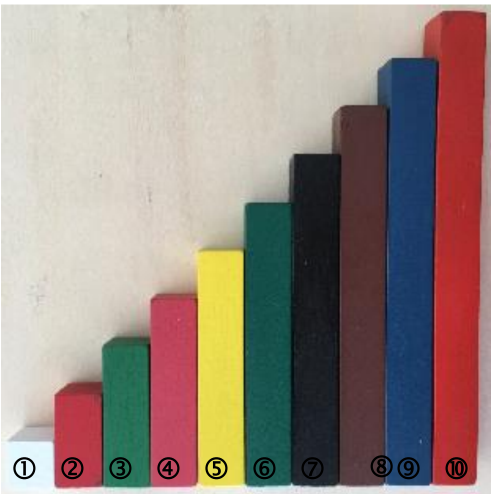
♦ **la numération égyptienne :**
Les hiéroglyphes représentant les chiffres et les nombres 10,100, 1000 ….Qu'est-ce que l'œil d'Horus ? le papyrus de Rhind ? Le zéro existait-il ? Carte géographique, frise chronologique.

♦ **la numération précolombienne (mayas et aztèques) :**
Les nombres de 1 à 19. Expliquer la base 20. Expliquer comment écrire 7 435. Qu'est-ce que le codex maya ? Le zéro existait-il ? Carte géographique, frise chronologique.

➢ Activité permettant de revisiter la numération de position pour les nombres entiers : notre système de numération s'éclaire aussi à la lumière de la compréhension du fonctionnement d'autres systèmes de numération, qui, pour certains, ne sont pas des systèmes de position (numération égyptienne par exemple). Comprendre le fonctionnement d'autres bases (20, 60) peut permettre de mieux s'approprier le fonctionnement en base 10.
➢ Compétences chercher, communiquer
➢ Lien possible avec le programme d'Histoire, éventuellement dans le cadre d'un EPI (en 6ème : les premières écritures : Mésopotamie/Egypte)

Situation 6 : Réglettes Cusenaire

Vous disposez d'une boite de réglettes :



Numéro	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
Couleur	*blanc*	*rouge*	*vert clair*	*rose*	*jaune*	*vert foncé*	*noir*	*marron*	*bleu*	*orange*

① L'unité est définie comme étant la longueur de la réglette orange. Quelle est la longueur des réglettes jaunes, rouge et blanches ?

② L'unité est définie comme étant la longueur de la réglette bleue. Quelle est la longueur des réglettes verte et blanche ?

> ➢ Fractions simples, fraction partage, travail autour de l'unité (reconstitution, changement d'unité). La manipulation permet de valider la réponse tout en travaillant le sens de la fraction partage.

③ La réglette orange vaut deux unités, quelle est la longueur des réglettes jaunes, blanches, marron et roses ?

> ➢ Idem, avec des fractions supérieures à l'unité

④ La réglette blanche vaut un septième de l'unité, quelle est l'unité ?

> ➢ Reconstruction de l'unité

⑤ La réglette verte vaut $\frac{3}{4}$ de l'unité, quelle est l'unité ?

> ➢ Travail autour de l'unité « dans l'autre sens » (complexité plus élevée, nécessitant une très bonne maitrise de la notion d'unité et de fraction partage).

⑥ La réglette vert foncé vaut deux unités, combien vaut la réglette rouge ?

> ➢ Fraction quotient ($6^{ème}$) : il faut trois réglettes rouges pour reconstituer les 2 unités. 3 × ? = 2

➢ A partir de la même situation, on peut augmenter progressivement la complexité (différenciation, idée de progressivité sur le cycle)

Situation 7 : Carte d'identité

Choisir une fraction parmi : $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{7}{3}$

Trouver le plus de façons possibles d'écrire et de représenter cette fraction.

➢ Carte d’identité construite en début de cycle et progressivement enrichie au fur et à mesure des apprentissages
➢ Compétence « représenter » : proposer plusieurs écritures possibles du même nombre
Situation proposée en annexe du document ressource

Situation 8 :
Complète les égalités suivantes par le nombre qui convient :

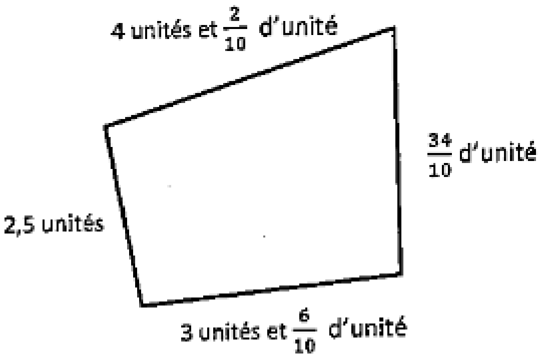
3 × … = 21
4 × … = 3
7 × … = 3

➢ Introduction progressive de la notion de fraction quotient ($6^{\text{ème}}$). Permet de revenir sur le fait qu’en CM1-CM2, le trait de fraction ne doit pas être vu comme une division.

Situation 9 : Je me souviens
Demander aux élèves d’écrire individuellement sur leur cahier ce qu’est une fraction (ce dont ils se souviennent)
(Variante : Demander aux élèves d’écrire individuellement sur leur cahier ce qu’est nombre décimal)

➢ Voir exemples de productions d’élèves
➢ Evaluation diagnostique : permet à l’enseignant de prendre connaissance des représentations/des connaissances des élèves afin de mieux réguler son enseignement et mesurer les progrès.

Situation 10 : périmètres
Calcule le périmètre de cette figure.

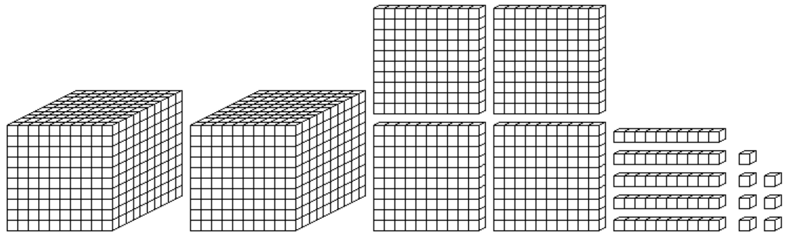


Source : document ressource « Fractions et nombres décimaux au cycle 3 »

➢ Lien avec grandeur et mesures
➢ Jeu sur les variables didactiques (lien avec la vidéo de la partie 2 : demander la réponse sous forme d’écriture à virgule limite les procédures possibles)
➢ Oralisation (voir l’exemple audio montrant un raisonnement juste avec une production écrite fausse)
Situation proposée en annexe du document ressource

Situation 11 : Vrai ou faux ?

L’unité est le petit cube. On a représenté ci-dessous le nombre 2 457.



Tony dit que dans ce nombre, il y a 4 centaines. Nourredine pense que c'est faux. Qui a raison ? Pourquoi ?

➢ Travail sur le « nombre de », permettant de travailler les liens entre les unités de numération (rapport 10 entre deux unités successives : dans 1 millier, il y 10 centaines, dans 2 milliers, il y a 20 centaines), et pas seulement le rapport à l'unité (1 millier = 1 000 unités). De la même façon, il sera nécessaire avec les nombres décimaux de travailler le rapport 10 entre les dixièmes et les centièmes, et pas seulement le rapport l'unité.

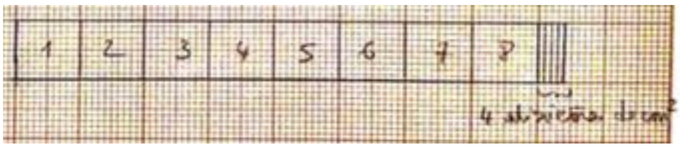
➢ Le même matériel peut permettre de travailler sur les dixièmes/centièmes/millièmes en prenant le gros cube comme unité, à condition que les élèves aient été habitués à changer de représentation de l'unité.

➢ Différenciation possible :
- revenir à du matériel plus concret (un feutre pris comme unité, une pochette de 10 feutres, une boite contenant 10 pochettes, un carton contenant 10 boites)
- travailler sur des écritures plus formelles : 2457 = 2000 + 400 + 50 + 7 = 20 × 100 + 4 × 100 + 50 + 7

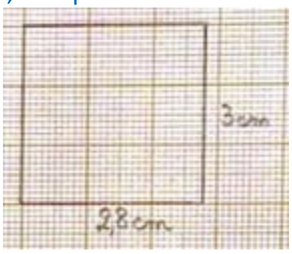
Situation 12 :
Construire sur du papier millimétré une figure d'aire 8,4 cm².

Source : document ressource « Fractions et nombres décimaux au cycle 3 »

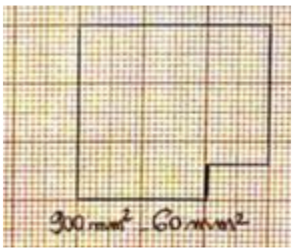
➢Cette situations dans le domaine des grandeurs et mesure, en fin de cycle 3, réinterroge le nombre décimal : que signifie le 4 dans 8,4 cm² ?
4, c'est 4/10 de l'unité. Or, l'unité est le cm². Il s'agit donc de prendre les 4/10 d'un cm², donc de partager un cm² en 10 parts égales et prendre 4 de ces parts.



➢La question, ouverte, laisse la place à de nombreuses autres procédures :
- mobilisation de l'aire d'un rectangle et décomposition de 8,4 en produit de deux nombres :



- décomposition et recomposition d'aires :

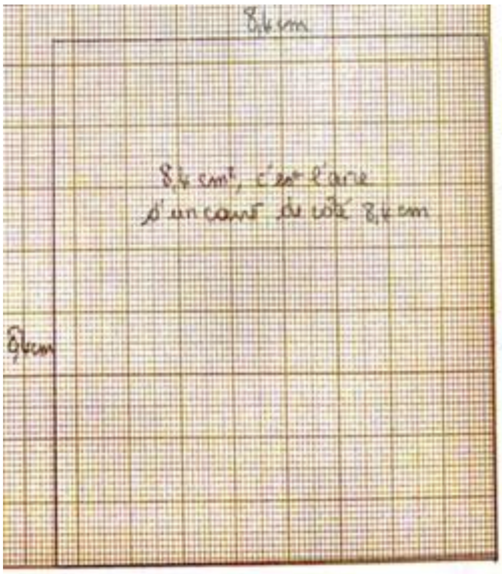


➢Les erreurs gagnent à être exploitées, par exemple sous forme de question flash proposée à distance de l'activité :

◆ Confusion entre 8,4 et $8 + \frac{1}{4}$

◆ Tentative de conversion erronée

◆ Transfert erroné de la définition d'un cm² « 1 cm², c'est l'aire d'un carré de côté 1 cm »



Situation 13 :

Simon Stevin est un comptable hollandais qui vécut à Bruges au XVIème siècle.

Il trouvait que les nombres écrits de cette manière : $21 + \frac{5}{10} + \frac{3}{100} + \frac{2}{1000}$ n'étaient pas très pratiques pour effectuer des calculs.

Alors il eut l'idée de proposer une écriture plus simple : $21^{(0)}\ 5^{(1)}\ 3^{(2)}\ 2^{(3)}$ où le $^{(0)}$ indique les unités entières, $^{(1)}$ les dixièmes, $^{(2)}$ les centièmes, et ainsi de suite….

Un peu plus tard, le mathématicien John Napier proposa de remplacer le $^{(0)}$ par une virgule et de ne pas écrire les autres symboles.

$21 + \frac{5}{10} + \frac{3}{100} + \frac{2}{1000}$ s'écrira alors 21,532

A ton tour : Ecris les nombres $3 + \frac{7}{10} + \frac{9}{100}$ et $13 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100} + \frac{8}{1000}$ à la manière de John Nieper.

➢ Situation introduisant le nombre décimal comme **convention** d'écriture, à partir de la décomposition canonique.

Situation 14

Leïla veut préparer un cocktail composé de jus d'orange, de jus d'ananas et de sirop de citron.
Pour cela, elle utilise la recette suivante :

> **Cocktail de jus de fruit**
> - 0,5 l de jus d'orange
> - $\frac{1}{4}$ de litre de jus d'ananas
> - $\frac{1}{10}$ de litre de sirop de citron

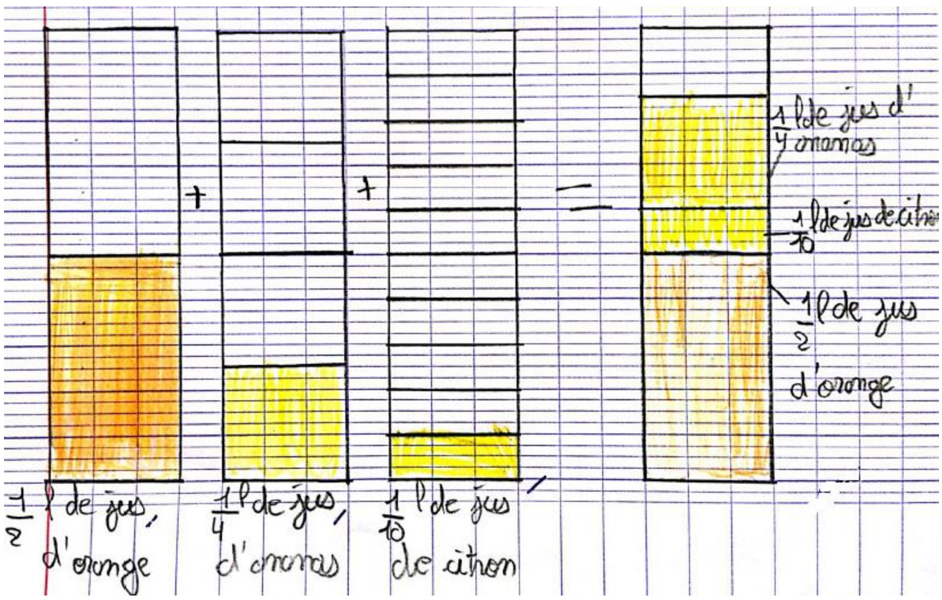
Après avoir effectué le mélange, Leïla se demande si elle obtient un litre de cocktail.
Propose une méthode pour répondre à cette question

Source : document ressource « Fractions et nombres décimaux au cycle 3 »

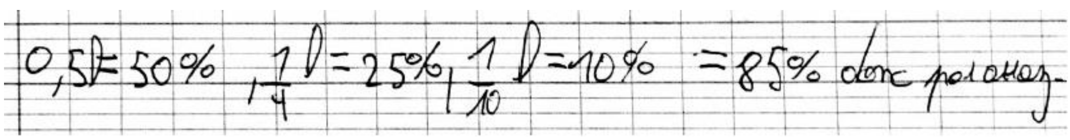
➢ Les nombres choisis dans cet énoncé (écriture à virgule, dixièmes, quart) et la consigne ouverte permettent aux élèves de mobiliser un grand nombre de procédures différentes, utilisant différentes **représentations** des nombres (fraction-partage, pourcentages, fractions, écritures à virgule….)

La richesse des productions obtenues ci-dessous est favorisée par un travail régulier toute l'année visant à laisser la place aux diverses représentations des nombres et aux liens qui existent entre elles.

Fraction partage :



Pourcentages :



Fractions décimales, puis écriture à virgule :

$0,5 = \frac{50}{100}$ jus d'orange $= 0,50$

$\frac{1}{4} = \frac{25}{100}$ = jus d'ananas $= 0,25$

$\frac{1}{10} = \frac{10}{100}$ = jus de citron $= 0,10$

J'ai tout converti en centièmes pour faciliter

Ecriture à virgule :

0,5

$\frac{5}{10}$ de litres de Jus d'orange.

$\frac{1}{4}$ de litres de Jus d'ananas $= 0,25$

$\frac{1}{10}$ de litres de Sirop de Citron $= 0,1$

$0,5 + 0,1 + 0,25 = 0,85.$

Fractions mises au même dénominateur :

$\frac{5\times2}{10\times2} + \frac{1\times5}{4\times5} + \frac{1\times2}{10\times2}$

$\frac{10}{20} + \frac{5}{20} + \frac{2}{20} = \frac{17}{20}$

Elle obtient pas 1 litre