

Conférence départementale du 10 octobre 2007

► Maths au cycle 1 et au cycle 2 : la numération...

Philippe Lestievent (IEN ASH du Cher)

1, 2, 3 et après ?

Les recherches en mathématiques effectuées durant 10 ans ont permis de définir quelques invariants dans l'apprentissage des jeunes enfants au niveau numérique. Un constat : les mathématiques au cycle 1 sont les parents pauvres de l'éducation nationale : la baisse des résultats obtenus aux évaluations nationales le montre.

A. Que nous disent les programmes ?

1) Compétences relatives aux formes et aux grandeurs

- différencier et classer des objets
- reconnaître, classer et nommer des formes simples
- reproduire un assemblage d'objets à partir d'un modèle
- comparer, classer et ranger des objets selon leur taille

2) Compétences relatives aux nombres et aux quantités

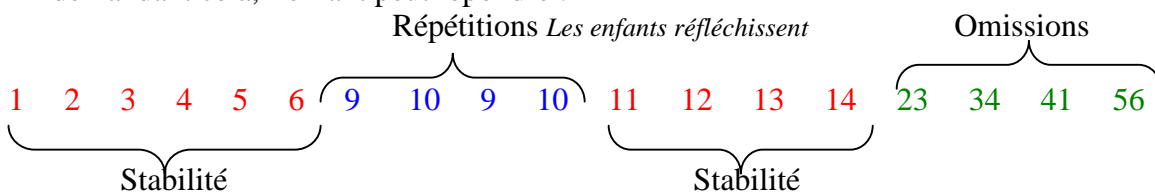
- comparer des quantités
- réaliser une collection
- construire une collection équivalente
- augmentation et diminution d'une collection
- distribution et partage
- reconnaître et exprimer de très petites quantités
- connaître la comptine numérique orale au moins jusqu'à 30
- dénombrer une quantité en utilisant une suite orale
- associer le nom des nombres avec leur écriture chiffrée en se référant à la bande numérique

B. Comment l'enfant entre-t-il dans les apprentissages numériques ?

1) Du côté de l'apprenant.

a) « Montre-moi jusqu'où tu sais compter »

En demandant cela, l'enfant peut répondre :



Il y a toujours respect de l'ordre chronologique (sauf pour les enfants psychotiques).

Il convient de ne pas interrompre les enfants (quand il y a erreur par rapport à la prescription). C'est seulement après qu'on leur dira ce qui était attendu (1 à 18 dans ce cas).

Il existe 3 niveaux d'acquisition identifiables :

Très tôt, les enfants discriminent les mots qui servent à compter des autres mots.

- la zone ni stable ni exacte
- la zone stable et inexacte
- la zone stable et exacte

Pour atteindre ce dernier niveau, il faut entraîner les enfants à compter et les faire travailler sur ce qu'ils maîtrisent.

b) La mise en place des savoirs numériques

4 niveaux caractérisent la mise en place de la numération de mots et 8 habiletés mentales sont à travailler.

- le niveau de chaîne chapelet

C'est le moment où l'enfant engrange des noms de nombre. Cela correspond à la zone ni stable, ni exacte : il n'y a pas de représentation mentale des nombres, l'enfant apprend par cœur (pas de représentation mentale).

Travail à effectuer avec les enfants : l'enfant doit souffler avant d'énoncer la suite numérique.

- le niveau de chaîne insécable

2 habiletés mentales sont alors en jeu : la capacité à pouvoir compter jusqu'à...

et la capacité à pouvoir livrer le successeur de ... : 4 niveaux d'évaluation → « qu'est-ce qui vient après 4 ? »

↳ 1... 2... 3... 4... **5** verbalisation à haute voix

on n'entend plus rien mais les lèvres remuent

on ne voit plus rien mais on imagine le temps que prend l'opération

mentale

dit immédiatement **5**.

Apparaissent les éléments constitutifs de la chaîne numérique.

- le niveau de chaîne sécable

4 habiletés mentales en jeu : compter à partir de...

compter de n en n : il faut permettre aux enfants d'y accéder dès le plus jeune âge (compter par bonds [c'est la contraction en un acte unique d'un acte élémentaire répété plusieurs fois])

compter à l'envers : capacité à défaire ce que l'on a su faire en un temps. L'école doit favoriser la mise en place de cette réversibilité.

Comment procèdent les enfants ? → procédure mentale : compter à l'endroit, mémoriser les derniers nombres (la loi organisationnelle -1 n'est pas construite). Jusqu'au départ de la frise numérique. Le "0" n'a aucun statut (ex. du compte à rebours suivi de "partez !"). Il ne sera conceptualisable qu'au CE2 (a - a).

livrer le prédécesseur d'un nombre : avoir construit le principe de réversibilité.

Bannir l'exigence de demander en même temps le prédécesseur et le suivant d'un nombre : 2 niveaux d'exigence différents.

- le niveau de chaîne terminale

La réversibilité est complètement opérationnelle. L'outil nombre devient un outil de pensée.

2 habiletés mentales : compter de x à y ; compter x à partir de y [sens direct et indirect] : « tu comptes 4 à partir de 9, à l'envers ».

	compteur = 0	résultat
	1	9
comparer 1 ≠ 4	2	(- 1) 8

Ces 8 habiletés sont en place à la fin du CP (stabilisation), l'enfant a alors le potentiel pour travailler dans les espaces numériques ; ensuite ce n'est que de l'accommodation.

c) De l'oral à l'écrit

4 paliers caractérisent le passage de l'oral à l'écrit :

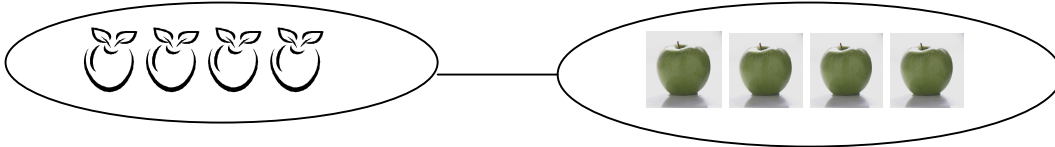
- les indications idiosyncrasiques (non communicables)

C'est simplement une trace. Trace proposée au même enfant plus tard : impossibilité pour cet enfant de la reconnaître.

- les pictogrammes

C'est une copie du réel sous la forme d'une correspondance terme à terme.

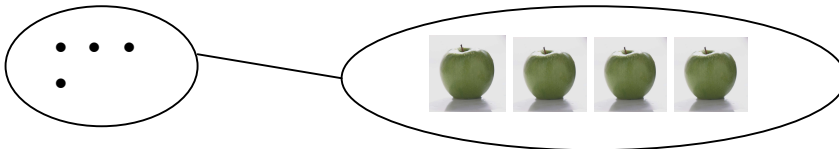
Ex. :



- les symbolisations

C'est l'utilisation de symboles (pas toujours les mêmes) : autant d'éléments qu'il y a d'objets.

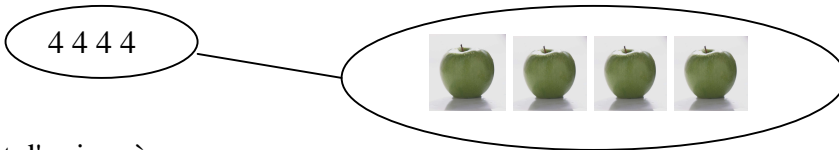
Ex. :



- les signes conventionnels

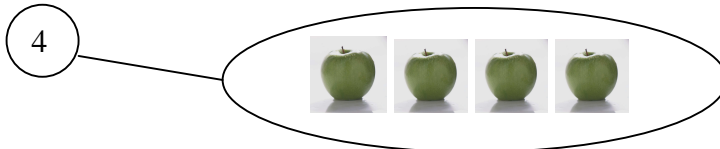
C'est l'écriture du nombre autant de fois qu'il y a d'objets avant l'utilisation du nombre une seule fois.

Ex. :



Avant d'arriver à :

Ex. :



Evolution des connaissances numériques de la TPS à la GS

à l'oral		à l'écrit
"trois"	← TPS-PS →	chiffres isolés
"dix-onze"	← PS-MS →	6
"trente"	← MS-GS →	30
"soixante-neuf"	← GS →	99

2) Du côté de la matière...

a) Les caractéristiques de la numération de mots

La file numérique verbale compte **vingt-huit mots** :

- 16 mots particuliers pour désigner les 16 premiers nombres
- 5 mots pour exprimer les dizaines
- 6 mots pour exprimer les puissances de dix (cent, mille, million, milliard, billion, trillion)
- le zéro

Il arrive un moment où l'on ne peut plus dire : la numération de mots est une numération finie.

On note également :

- des présences superflues (dix, onze, douze, vingt, et) et des absences notoires (soixante-dix [septante], quatre-vingts [huitante ou octante], quatre-vingt-dix [nonante])
- une base indéterminée (base dix-sept [de 0 à 16] ; pseudo base dix [de 17 à 19 ; de 20 à 59 si l'on abstrait le nouveau nom de dizaine] ; base dix-sept [de 60 à 76 et de 80 à 96])
- des ruptures arbitraires (vingt-ET-un ; cinquante-ET-un ; cent au lieu de UN cent)
- une numération hybride [quarante-huit => quarante + huit ; quatre-vingts => quatre x vingt ; quatre-vingt-dix-sept => quatre x vingt + dix + sept].

Un éclairage est donc nécessaire pour l'enfant.

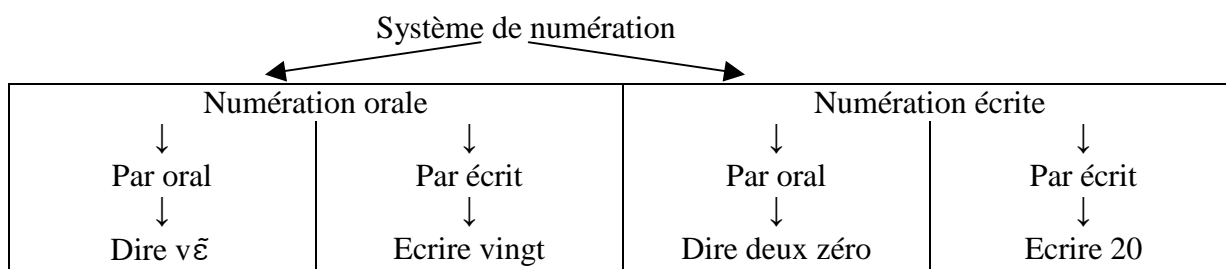
b) Les caractéristiques de la numération de signes

- emploi de 10 signes (0-1-2-3-4-5-6-7-8-9-0)
- usage de la base dix en tout lieu de la chaîne
- règle numérale de position (425 – 359 – 510)
- utilisation du zéro (30 – 300 – 3000)

c) Oral/écrit : un même monde ?

Oral qui s'oralise, oral qui s'écrit

Écrit qui s'oralise, écrit qui s'écrit



Exemple :

Interrogations de l'enseignant sur le précédent à 20		Réponses de l'enfant	
Système de numération	Numération de mots	oralisé	Numération de mots → 19
			Numération de mots → dix-neuf
		écrit	Numération de signes → 1 - 9
			Numération de signes → un neuf 19
	Numération de signes	oralisé	Numération de mots →
			Numération de signes →
		écrit	Numération de mots →
			Numération de signes →

Outil qui permet d'avoir les 16 déclinaisons du rapport oral / écrit.
 La numération de signes se stabilise en premier.

3) Quelques situations pédagogiques

a) Quelques situations de comptage

13 situations de comptage dans la numération de mots : 5 min tous les jours.

- Enfant seul :

- compter le plus loin possible (identification de la zone stable et exacte), même en CP-CE1
- compter le plus loin possible sous la forme "dire un nombre fort, le suivant faible..." → Cela focalise alors l'attention sur le "comment on va le dire"
- compter le plus loin possible sous la forme "dire un nombre, taire le suivant..." → renforcement de la segmentation
- compter le plus loin possible en frappant sur ses propres énonciations
- compter le plus loin possible sous la forme "dire un nombre, taire le suivant en frappant sur le nombre tu"
- compter le plus loin possible sous la forme "frapper entre les énonciations"

- Deux enfants (ou un adulte et un enfant) :

- compter le plus loin possible en frappant sur les dits de l'autre
- compter le plus loin possible sur les frappés de l'autre (rythme plutôt lent de préférence)
- compter le plus loin possible en alternance (chacun son tour)
- compter le plus loin possible en alternance et en frappant sur les dits de l'autre
- compter le plus loin possible en énonçant deux nombres consécutifs
- compter le plus loin possible en énonçant deux nombres consécutifs sous la forme "en dire un, taire le suivant"

- Trois enfants :

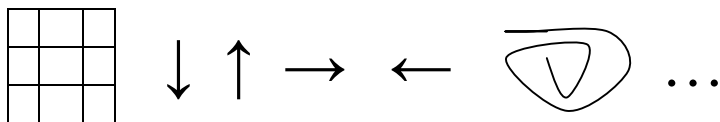
- compter le plus loin possible sous la forme "deux nombres dits, un répondu"

b) Travail sur le segment de 1 à 9

S'approprier la loi organisationnelle de l'écrit. Il existe 2 temps spécifiques de travail sur la reconnaissance puis sur la connaissance du segment de 1 à 9 (numération de signes).

- Travail de reconnaissance :

Reconstruire le segment de la file numérique à l'aide d'un nombre important d'étiquettes amovibles (en toutes directions [de la gauche vers la droite, de la droite vers la gauche, du haut vers le bas, du bas vers le haut, en escalier, en spirale, utilisation de tableaux 3X3)



Attention : l'important consiste à briser le perceptif pour ne conserver que l'opérateur !

- Travail de connaissance :

Retrouver les éléments cachés en sens direct et en sens indirect.

"Qu'y a-t-il derrière les caches ?"

1	2	3	4	5	■	■	8	9		■	■	■	4	5	6	7	8	9
						↑						↑						
						?						?						

sens indirect : 9 ■ ■ ■ ■ 4 3 2 1

En ce qui concerne le dénombrement :

On note **3 procédures de quantification** :

- l'aperception globale : dire combien la collection comporte d'éléments sans avoir besoin de les dénombrer. Ex. : les configurations dites figuratives (de type dés ou dominos), les configuration non figuratives (perception jusqu'à «4» sans être en appui sur le comptage)

- l'estimation globale : dire approximativement combien d'éléments comporte la collection. Il est important, très jeune, d'apprendre à estimer le monde qui nous entoure.

- le comptage : dire, après dénombrement, combien il y a d'éléments dans une collection déterminée. Les cinq principes selon Rachel Gelman → de bijection (stricte correspondance terme à terme entre objets décomptés et noms de nombre)

d'ordre stable (la suite des nombres correspond à une séquence fixe)

de cardinalité (le dernier terme fourni correspond au cardinal de la collection évaluée)

d'abstraction (l'hétérogénéité des collections n'a aucune incidence sur le dénombrement : même valeur quelle que soit la taille des objets, par exemple)

d'ordre quelconque (le résultat du dénombrement ne se trouve nullement modifié selon qu'on amorce le comptage par une extrémité de l'ensemble ou par l'un quelconque des éléments).

Il faut faire dénombrer des collections de nombres très régulièrement jusqu'en CE1.

Quelques pistes pédagogiques... ... concernant les procédures de dénombrements :

Pour aider les enfants, il faut travailler dans la zone stable et exacte de l'enfant ; proposer des collections homogènes d'objets ; privilégier, dans un 1^{er} temps, des dénombrements organisés (en lignes, en colonnes, en perception cartésienne) ; jouer de l'hétérogénéité (formes, couleurs, tailles) ; proposer, dans un 2nd temps, des dénombrements inscrits dans un espace non organisé ; augmenter des collections (le surcomptage implique la maîtrise de la capacité à compter à partir de...) ; diminuer des collections (le décomptage implique la capacité à compter à partir de... et la capacité à compter à l'envers).

Compétences relatives aux formes et aux grandeurs

• Comparer → trier → classer → ordonner ; distribuer \Leftrightarrow partager

4 compétences de comparaison de collections : comparer (retrouver un élément identique à celui livré en référence) ; trier (retrouver tous les éléments identiques à celui livré en référence) ; classer (constituer l'ensemble de toutes les sous collections ayant au moins un critère commun) ; ordonner (mettre en ordre l'ensemble des sous collections selon un critère particulier [du plus petit au plus grand])

2 compétences de répartition de collections : la distribution (répartir tous les éléments détenus jusqu'à épuisement du stock) ; le partage (distribuer de manière équitable ; gestion du stock)

• L'algorithmie

Les algorithmes répétitifs : de type binaire, de type quaternaire, de type tertiaire

Les algorithmes récursifs : à 2 éléments, à 3 éléments

Quelques pistes pédagogiques... sur les algorithmes :

Construire la séquence devant l'enfant (45 min) : écrire au tableau la suite des nombres la plus longue possible. Repérer les choses connues. On va essayer de les retrouver ensemble (1 à 9). Si l'on regarde bien, on va retrouver la même chose ailleurs (dans cette suite de nombres : 11 à 19...). Regarder encore (même chose avec les dizaines). Le zéro est le chef de famille.

- Poursuivre le développement algorithmique :
 - vers la droite (sens de construction initial)
 - vers la gauche
 - en suivant le contour de la table (inversion de la règle en espace mental de travail)
- Isoler les cellules de base
- Reconstruire les éléments cachés
- Dessiner l'algorithme construit.

Pour résumer...

Au cycle 1

- Allongement de la chaîne numérique verbale
- 4 niveaux de chaîne et 8 habiletés mentales
- Connaissance des nombres de 1 à 9 (loi)
- Dénombrement de collections (Gelman)
- Algorithmie.

Au cycle 2

- Allongement de la chaîne numérique verbale
- 4 niveaux de chaîne et 8 habiletés mentales
- Connaissance des nombres de 1 à 999 (loi, ordre)
- Liaisons Oral/Ecrit
- Relations arithmétiques (doubles, moitiés...)
- Addition, soustraction, multiplication (sens et technique)
- Calcul mental, en ligne ou posé, instrumenté
- Situations problèmes (additifs, soustractifs, multiplicatifs) en appui sur des procédures personnelles ou des procédures expertes.