

**RÉSOLUTION DE
PROBLÈMES:
TYPOLOGIE ET
REPRÉSENTATIONS**

UN PROBLÈME...

ERMEL

« Il y a problème dès qu'il y a réellement quelque chose à **chercher**, que ce soit au niveau des données ou du traitement et **qu'il n'est pas possible de mettre en jeu la mémoire seule.** »

D. PERNOUD

« Est un problème, pour un élève donné, toute **situation** (réelle ou imaginaire) dans laquelle des **questions** sont posées, ces questions étant telles que **l'élève ne peut y répondre de manière immédiate.** »

G. BROUSSEAU

« il y a problème lorsqu'on peut apporter des réponses par des **raisonnements**. Il faut qu'il y ait quelque chose à **chercher** et qu'il ne soit **pas possible d'utiliser la mémoire seule.** »

LA TÂCHE « RÉSOUDRE UN PROBLÈME »

COMMUNIQUER : comprendre l'énoncé.

CHERCHER : questions heuristiques : Y a-t-il un tout?

Une partie? Qu'est-ce que je cherche?

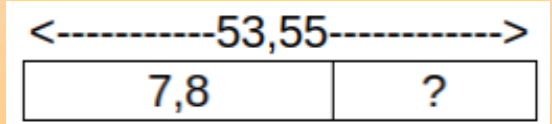
RAISONNER : Pour répondre aux questions heuristiques et reconnaître le modèle.

REPRÉSENTER : représentation en barres

Léa a 53,55€ dans son porte-monnaie. Elle achète un livre à 7,8 €.

Combien lui reste-t-il?

Modèle représenté en barres



construction du modèle

BOUCLE DE LA MODÉLISATION

Validation - contrôle

traitement mathématique

RAISONNER : réflexion sur la stratégie pour trouver un modèle, sur la procédure choisie, sur la vraisemblance du résultat,

Il lui reste 45,75 €

COMMUNIQUER : rédiger une phrase réponse.

CALCULER : soustraction posée en colonne $53,55 - 7,8 =$

RAISONNER : Faits numériques.

REPRÉSENTER ET MODÉLISER

- **Introduire des représentations**, sous forme de schémas adaptés, permettant **la modélisation** des problèmes proposés.
- L'objectif n'est pas d'établir un **catalogue** détaillé de typologies de problèmes pouvant exister, dont l'**usage** serait **inopérant** pour les élèves.
- **Créer des analogies** : réunir les problèmes dans des catégories aussi larges que possible.

CLASSIFICATION HOUDEMMENT (2018)

Problèmes « basiques »

Une seule étape. Pas de donnée superflue. Une syntaxe facile. Un contexte facile à comprendre (a priori). L'enjeu pour l'élève est la **mémorisation** d'un « modèle » référent (répertoire de situations).

Problèmes « complexes »

Problèmes « non élémentaires » qui sont constitués de plusieurs problèmes élémentaires.

On distingue deux catégories : explicites lorsque les étapes sont données, les élèves n'ont pas besoin de construire des sous-problèmes et implicites quand ce sont les élèves qui doivent décomposer le problème en sous-problèmes.

L'enjeu pour l'élève est de construire des sous-problèmes basiques calculables en connectant des informations et qualifiant les résultats.

Problèmes atypiques

Problèmes qui n'ont pas de modèle mathématiquement identifiable.

L'enjeu pour l'élève est l'inventivité stratégique, la flexibilité de raisonnement, la persévérance et la confiance en soi.

TYPLOGIE DE G. VERGNAUD (1981)

PROBLÈMES ADDITIFS ET SOUSTRACTIFS

			Exemples
Composition de deux états On considère les situations qui portent sur 3 grandeurs où 2 d'entre elles se composent pour donner la 3ème.	Recherche du composé		Problèmes ternaires <i>A midi, j'ai bu 2 verres d'eau et 1 verre de jus d'orange. Combien de verres ai-je bu en tout ?</i> <i>Dans notre cour, nous avons 5 bancs. Pendant la récréation, 3 bancs sont occupés par des enfants. Combien de bancs sont vides ?</i>
	Recherche d'1 partie		
Transformation d'un état Un état initial subit une transformation pour aboutir à un état final.	Recherche de l'état final		Problèmes ternaires <i>Tu avais 2 petites voitures. Je t'en donne encore une. Combien en as-tu maintenant ?</i> <i>Pose 5 cubes sur la table. Que dois-tu faire pour en avoir 7 ?</i> <i>J'ajoute 3 bonbons dans la boîte. Maintenant j'en ai 5. Combien la boîte contenait-elle déjà de bonbons ?</i>
	Recherche de la transformation		
	Recherche de l'état initial		
Comparaison d'états On compare 2 états. Dans ce type de problème, on trouve presque toujours les expressions « de plus/de moins »	Recherche de l'un des états		Problèmes ternaires <i>Alexis a 3 ans. Il a 1 an de plus (ou de moins) que sa sœur. Quel est l'âge de sa sœur ?</i> <i>Sur une assiette, il y a 2 gâteaux. Sur une autre, il y en a 5. Combien y a-t-il de gâteaux de plus sur la 2^{ème} assiette ?</i>
	Recherche de la comparaison		

TYPOLOGIE DE G. VERGNAUD (1981)

PROBLÈMES MULTIPLICATIFS

OUTIL POUR
L'ENSEIGNANT :

AIDE A LA PROGRAMMATION

CONSTRUIRE DES SÉRIES DE
PROBLÈMES

ANALYSE DES RESSOURCES
PROFESSIONNELLES

HIÉRARCHISER LA DIFFICULTÉ

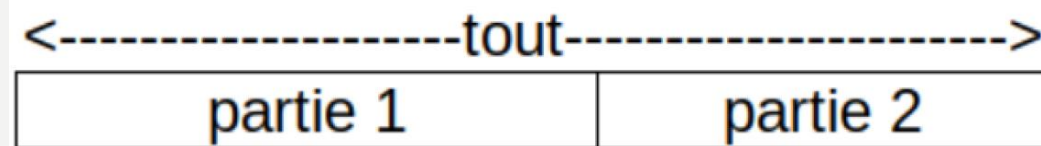
PRÉVOIR L'ÉVALUATION

Problèmes de multiplication	Configuration rectangulaire	Ces problèmes mettent en jeu un produit de mesures et sont scolairement identifiés comme supports à la construction du concept de multiplication.	Problèmes ternaires	<i>Quel est le nombre de carreaux de chocolat que contient une tablette de 3 sur 4 ?</i>
	Multiplication	Ces problèmes relèvent de l'addition répétée. On cherche le nombre total d'éléments		<i>Il y a 4 élèves. La maîtresse distribue 3 jetons à chaque élève. Combien distribue-t-elle de jetons en tout?</i>
Problèmes de division	Division quotient	On calcule le nombre de paquets identiques que l'on peut faire dans une collection en connaissant la valeur d'un paquet.	Problèmes quaternaires	<i>La maîtresse a 12 jetons. Elle les distribue à un groupe d'élèves. Chaque élève reçoit 3 jetons. Combien y a-t-il d'élèves ?</i>
	Division partition	On calcule la valeur d'un paquet connaissant le nombre de paquets identiques que l'on peut faire dans une collection.		<i>La maîtresse a 12 jetons. Elle les distribue à 4 élèves. Chaque élève a le même nombre de jetons. Combien de jetons a chaque élève ?</i>

CLASSIFICATION MÉTHODE EN BARRE OU DE SINGAPOUR (2009)

Modèles partie-tout ou avant/après :

On y retrouve les catégories de problèmes suivantes :
composition d'état et transformation d'état.



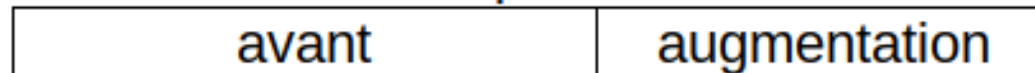
cas d'une diminution (absolue)

<-----avant----->



cas d'une augmentation (absolue)

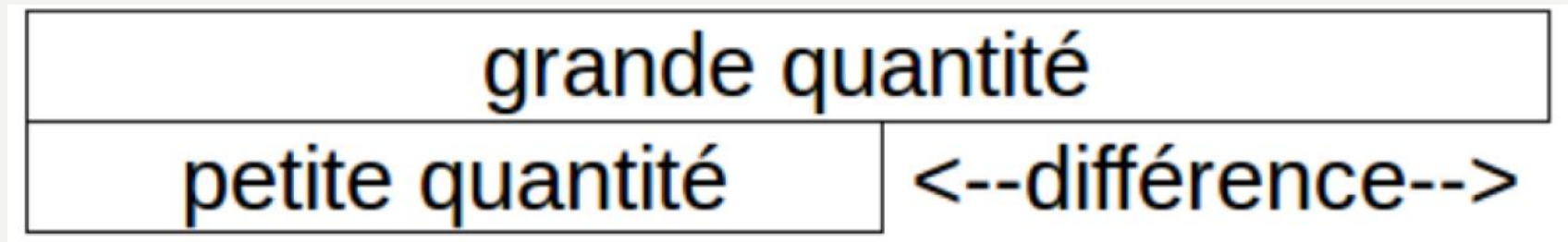
<-----après----->



CLASSIFICATION MÉTHODE EN BARRE OU DE SINGAPOUR (2009)

Modèles de comparaison

Ils regroupent les problèmes qui nécessitent de **comparer deux quantités** : recherche de la différence, de la petite ou de la grande quantité.

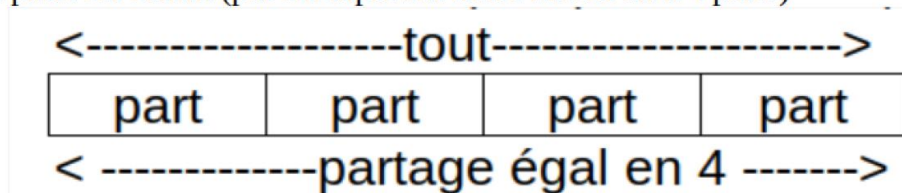


CLASSIFICATION MÉTHODE EN BARRE OU DE SINGAPOUR (2009)

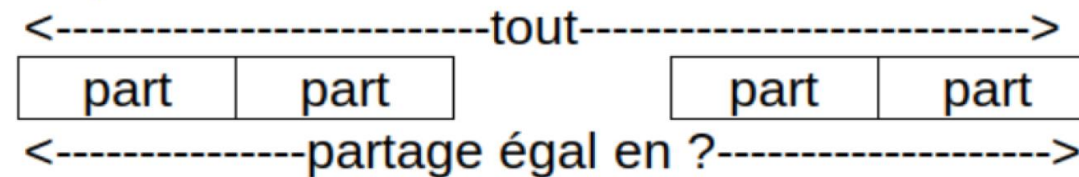
Modèles de multiplication et division

Recherche d'un tout, du nombre de part ou de la valeur de la part.

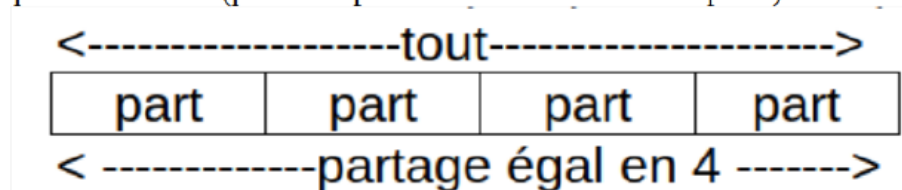
Si le nombre de parts est connu (par exemple sur notre dessin on a 4 parts)



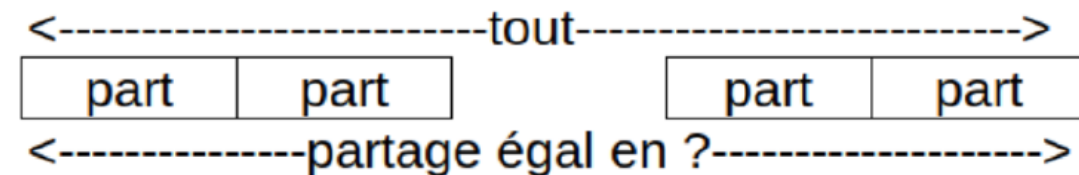
Si le nombre de parts est inconnu



Si le nombre de parts est connu (par exemple sur notre dessin on a 4 parts)



Si le nombre de parts est inconnu



QUESTIONS HEURISTIQUES

Y a-t-il un tout ?

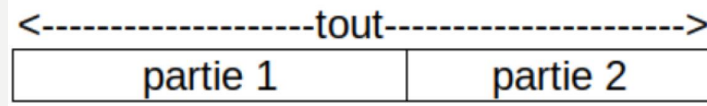
Y a-t-il une part, partageant le tout en parts égales ?

Quelle est le nombre de parts ?

Qu'est-ce que je cherche ?

CLASSIFICATION MÉTHODE EN BARRE OU DE SINGAPOUR (2009)

Modèles partie-tout



Questions heuristiques possibles :

Y a-t-il des parties ?

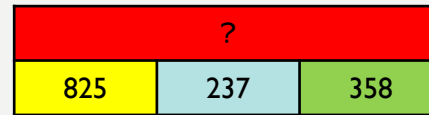
Y a-t-il un tout ?

Qu'est-ce que je cherche ?

recherche d'un tout

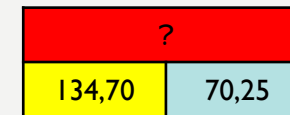
Trois avions se sont posés à l'aéroport : il y avait 825 passagers dans le premier avion, 237 passagers dans le deuxième avion et 358 dans le troisième avion.

Combien de passagers au total ont-ils débarqué ? RP CE2



Dans ma tirelire, j'ai 134,70 euros et dans mon porte-monnaie, j'ai 70,25 euros.

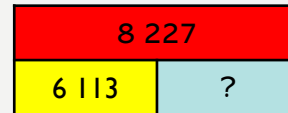
Combien ai-je d'argent en tout ? (CMI)



recherche d'une partie

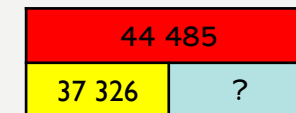
Dans mes deux coffres, j'ai en tout 8 227 billes. J'en ai 6 113 dans mon coffre vert.

Combien en ai-je dans mon coffre rouge ? RP CE2



Lors de la finale de la coupe de France de football, on a enregistré 44 485 entrées dont 37 326 payantes.

Combien a-t-on distribué d'entrées gratuites ? (CM)



problème complexe

A la cantine, il y a 53 filles et 79 garçons.
Il y a 140 pommes.

Est-ce que tous les élèves pourront manger une pomme ?

problème atypique

Johana a 18 images en tout. Elle en a mis 5 sur le mur de sa chambre.
Elle a rangé les autres dans le tiroir de son bureau et dans son coffre à jouets.

Combien peut-il y avoir d'images dans son coffre à jouets ? (fin de CP/CE1)

CLASSIFICATION MÉTHODE EN BARRE OU DE SINGAPOUR (2009)

Modèles avant/après (temporalité)

Questions heuristiques :

Y a-t-il une transformation ? Y a-t-il un état final ou initial ?
Y a-t-il une diminution/augmentation? Qu'est-ce que je cherche ?

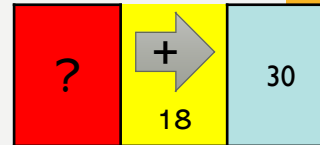
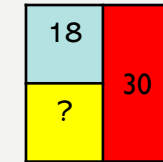
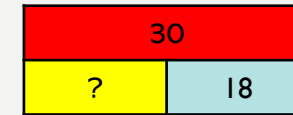
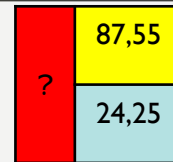
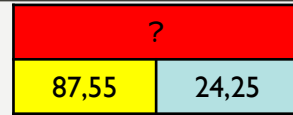
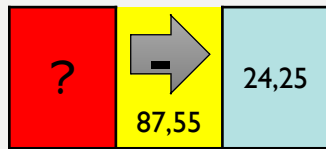
DIMINUTION

AUGMENTATION

recherche d'un état initial

M. Durand entre dans un magasin où il achète une paire de chaussures à 87,55 euros. Il sort du magasin avec 24,25 euros.
Avec combien d'argent M. Durand est-il entré dans le magasin ?
RP CMI

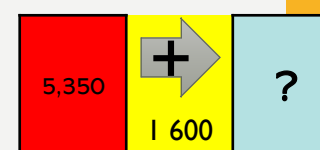
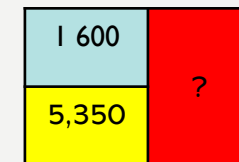
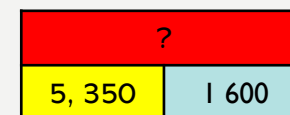
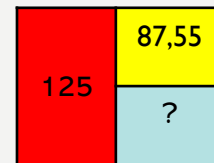
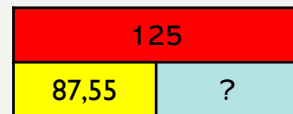
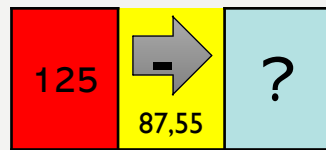
Tom a gagné 18 billes pendant la récré. Ce soir, il a 30 billes.
Combien de billes avait-il ce matin? (CEI)



recherche d'un état final

M. Durand a 125 euros en poche. Il entre dans un magasin et s'achète une paire de chaussures à 87,55 euros.
Avec combien d'argent ressort-il du magasin ? RP CMI

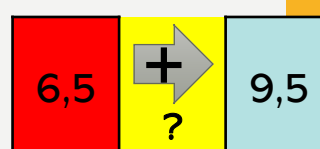
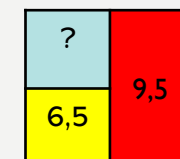
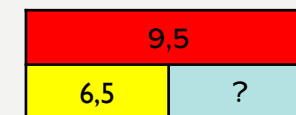
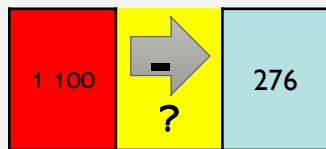
Le camion à vide pèse 5,350 tonnes. On charge le camion avec une palette de 1600 kilos.
Combien pèse le camion après le chargement? (CM)



recherche d'une transformation

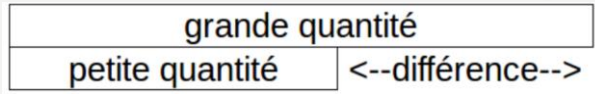
Avant la tempête, mon toit était couvert de 1100 tuiles. Après la tempête, il n'en restait plus que 276.
Combien le vent a-t-il emporté de tuiles sur mon toit ? (CM)

Nous sommes aujourd'hui environ 6,5 milliards d'habitants sur terre. On estime qu'en l'an 2100, nous serons 9,5 milliards.
De combien la population mondiale se sera-t-elle accrue?(CM)



CLASSIFICATION MÉTHODE EN BARRE OU DE SINGAPOUR (2009)

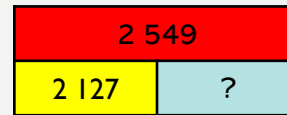
Modèles de comparaison



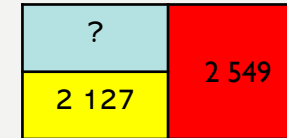
Questions heuristiques :
 Y a-t-il une grande quantité ?
 Sont-elles comparées ?
 Y a-t-il une petite quantité ?
 Qu'est ce que je cherche ?

recherche de la différence

Le lycée Vercors accueille 2 127 élèves. Le lycée Belledonne accueille 2 549 élèves.
 Combien d'élèves le lycée Vercors a-t-il de moins que le lycée Belledonne ? CM

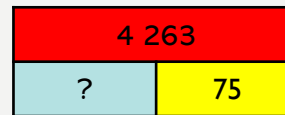


Le lycée Vercors accueille 2 127 élèves. Le lycée Belledonne accueille 2 549 élèves.
 Combien d'élèves le lycée Belledonne a-t-il de plus que le lycée Vercors? CM

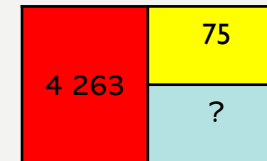


recherche de la petite quantité

Lucie a 4 263 images . Lucie en a 75 de plus que Léo.
 Combien d'images a Léo ?

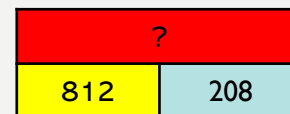


Lucie a 4263 images . Léo a 75 images de moins que Lucie.
 Combien d'images a Léo ?

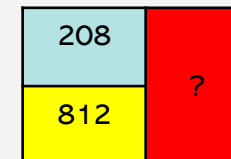


recherche de la grande quantité

Le Rhône mesure 812 km. La Loire mesure 208 km de plus que le Rhône.
 Combien de kilomètres mesure la Loire ? (CM)



Le Rhône mesure 812 km. Il mesure 208 km de moins que la Loire.
 Combien de kilomètres mesure la Loire ? (CM)



CLASSIFICATION MÉTHODE EN BARRE OU DE SINGAPOUR (2009)

Modèles de multiplication/division partie/tout

Questions heuristiques :

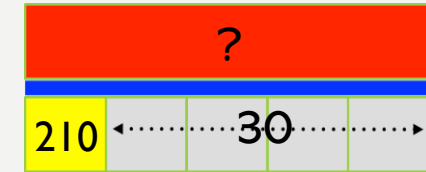
Y a-t-il un tout ? Y a-t-il une part, partageant le tout en parts égales ? Quelle est le nombre de parts ?

Qu'est ce que je cherche ?

recherche du tout

Lucie a fabriqué 30 colliers avec 210 perles chacun.

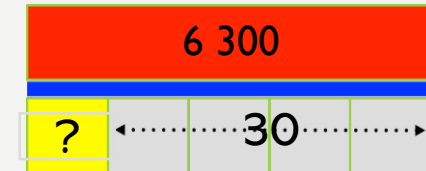
Combien Lucie a-t-elle utilisé de perles ? CE2



recherche de la part

Lucie a utilisé 6 300 perles pour faire 30 colliers.

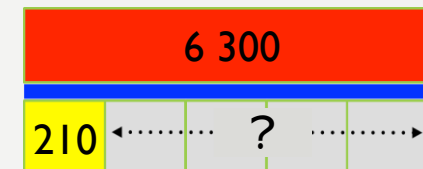
Combien chaque collier contient-t-il de perles ? CE2



recherche du
nombre de parts

Lucie a utilisé 6 300 perles pour faire des colliers. Chaque collier contient 210 perles.

Combien peut-elle faire de colliers ? CE2



CLASSIFICATION MÉTHODE EN BARRE OU DE SINGAPOUR (2009)

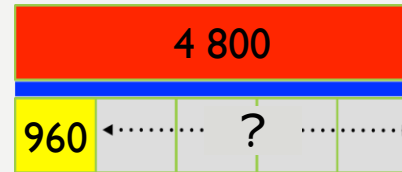
Modèles de multiplication/division comparaison

Questions heuristiques :
Y a-t-il une grande quantité ?
Sont-elles comparées ?
Y a-t-il une petite quantité ?
Qu'est ce que je cherche ?

recherche de
la différence

Le camion de Lorenzo pèse 4 800 kg. La voiture de Léa pèse 960 kg.
De combien de fois la voiture est-elle moins lourde que la camion ?

Le camion de Lorenzo pèse 4800 kg. La voiture de Léa pèse 960 kg.
De combien de fois le camion est-il plus lourd que la voiture ?



recherche de la
petite quantité

Le camion pèse 4800 kilos. La voiture de Léa est 5 fois moins lourde que le camion.
Combien la voiture pèse-t-elle ?

Le camion pèse 4800 kilos. Il est 5 fois plus lourd que la voiture de Léa.
Combien la voiture pèse-t-elle ?



recherche de la
grande quantité

La voiture de Léa pèse 960 kilos. Le camion de Lorenzo est 5 fois plus lourd que la voiture.
Combien pèse le camion ?

La voiture de Léa pèse 960 kilos. Elle est 5 fois moins lourde que le camion de Lorenzo.
Combien pèse le camion ?



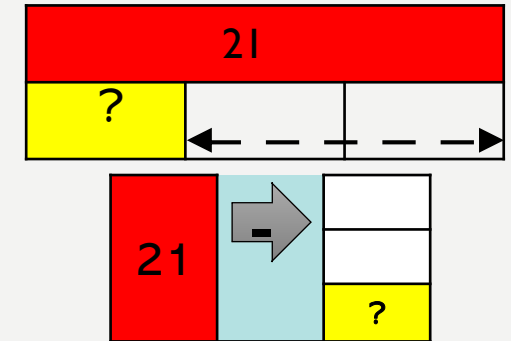
CLASSIFICATION MÉTHODE EN BARRE OU DE SINGAPOUR (2009)

Modèles de multiplication/division transformation (diminution)

Questions heuristiques :
Y a-t-il un tout ? Y a-t-il une part, partageant le tout en parts égales ? Quelle est le nombre de parts ?
Qu'est ce que je cherche ?

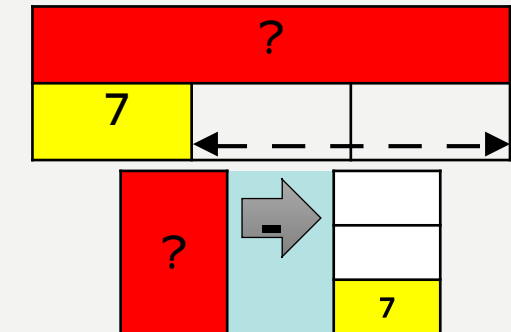
recherche d'un état final

Hier, le camion une fois chargé pesait 21 tonnes.
Aujourd'hui, on l'a déchargé. Il est 3 fois moins lourd.
Combien pèse-t-il ?



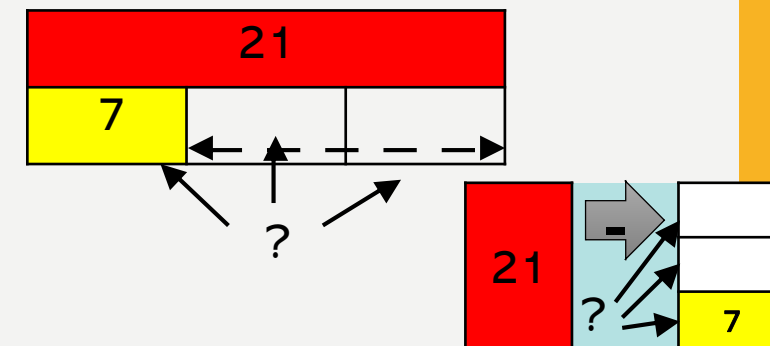
recherche d'un état initial

Aujourd'hui, le camion est vide et pèse 7 tonnes à vide.
Hier, il était 3 fois plus lourd car il était chargé.
Combien pesait-il avec sa charge ?



recherche d'une transformation

Hier le camion de Lorenzo pesait 21 tonnes. Aujourd'hui, il pèse 7 tonnes.
De combien de fois le camion de Lorenzo s'est-il allégé quand on l'a vidé ?



on peut jouer sur la chronologie

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES COMPLEXES

COMPARAISON RELATIVE

PROBLÈMES PRÉ-ALGÈBRIQUES

PROBLÈMES AVEC RESTE

PROBLÈMES A PLUSIEURS ÉTAPES

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES COMPLEXES

COMPARAISON RELATIVE

L'école primaire Duparc a 280 élèves.

L'école primaire de Chemin a 89 élèves de plus que l'école primaire Duparc.

L'école primaire Fontaine a 62 élèves de plus que l'école Duparc.

Combien y a-t-il d'élèves en tout ?

Duparc	280		?
Chemin	280	89	
Fontaine	280	62	

Ce problème est complexe car :

- il y a un problème partie-tout avec 3 parties (les 3 écoles) et un tout, avec recherche du tout ;
- il y a un problème de comparaison entre l'école de Chemin et l'école Duparc ;
- il y a un problème de comparaison entre l'école de Chemin et l'école Duparc .

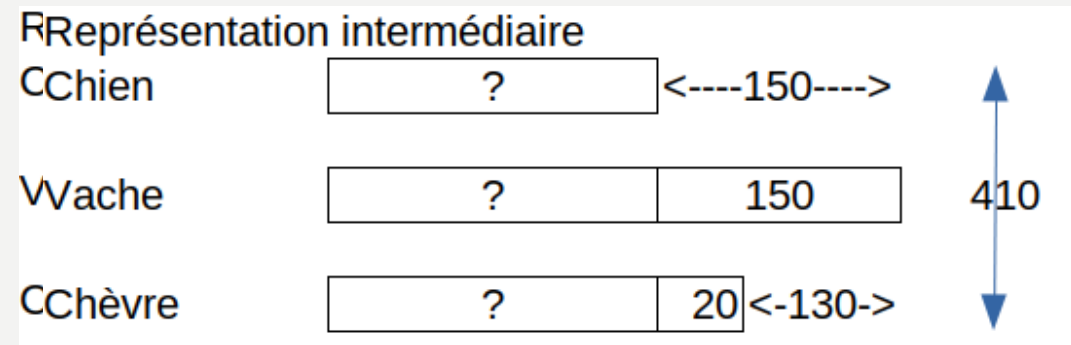
Il est arithmétique car l'inconnue s'obtient par traitement direct des données arithmétiques connues (les comparaisons puis le traitement partie-tout se font sur des nombres connus (nombres « algébriques ») « arithmétiques »). Il n'y a pas de traitement intermédiaire sur des nombres inconnus.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES COMPLEXES

PROBLÈMES PRÉ-ALGÈBRIQUES

Une vache pèse 150kg de plus qu'un chien. Une chèvre pèse 130kg de moins qu'une vache. Ensemble Les animaux pèsent 410kg.

Combien pèse le chien ?



Ce problème est complexe car :

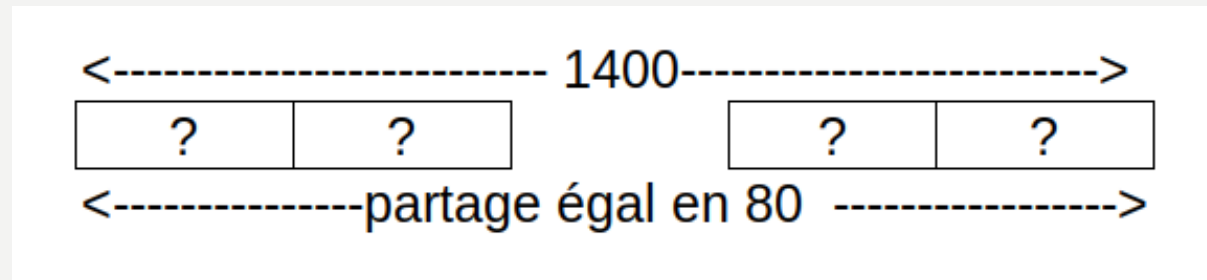
- *il y a un problème partie-tout avec 3 parties (les 3 animaux) et un tout , avec recherche d'une partie ;*
- *il y a un problème de comparaison entre la vache et le chien (aucun des deux n'étant connu en début de problème) ;*
- *il y a un problème de comparaison entre la vache et la chèvre (aucun des deux n'étant connu en début de problème) ;*
- *dans le traitement il faut reconnaître que la part égale « chien » est présente trois fois.*
- *Le problème est pré-algébrique car l'inconnue s'obtient par traitement (comparaison, partie-tout) sur des quantités inconnues).*

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES COMPLEXES

PARTAGE AVEC RESTE

Dans le lycée, il y a 1 400 élèves. Les professeurs veulent constituer 80 équipes (de même nombre d'élèves).

Combien y aura-t-il d'élèves par équipe ?



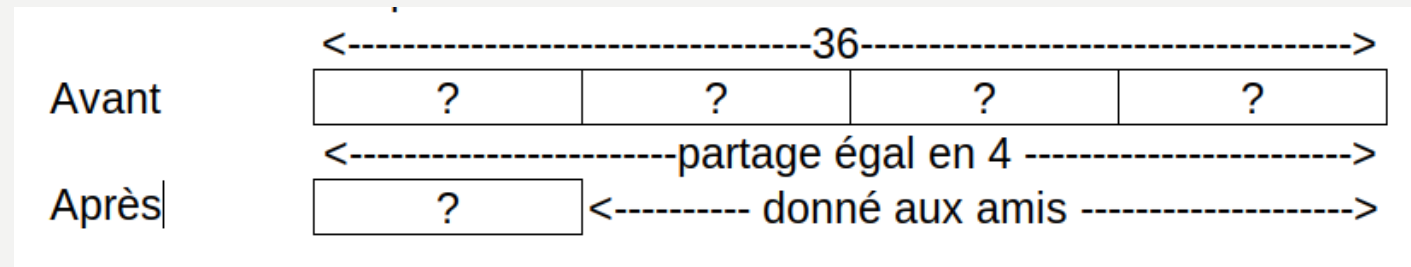
repères de
progression
CE2

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES COMPLEXES

PROBLÈMES A PLUSIEURS ÉTAPES

Hugo a 36 bonbons. Il en donne les $\frac{3}{4}$ à ses amis.

Combien de bonbons lui reste-t-il ?



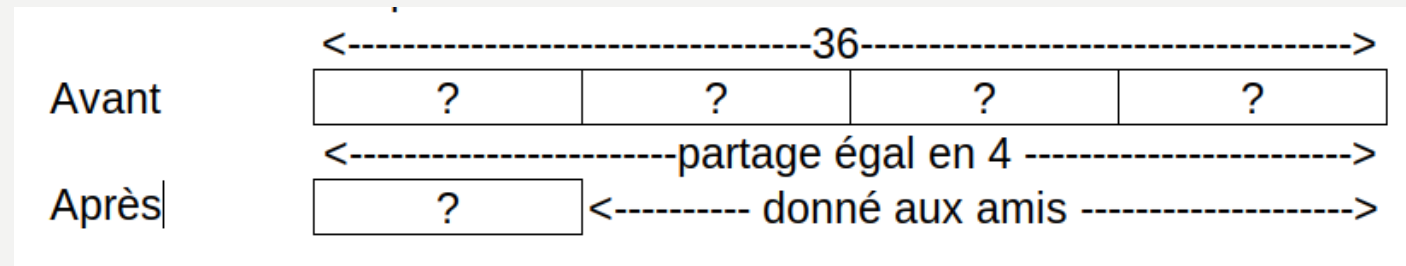
Ce problème est complexe car :

- il y a un partage en 4 évoqué dans l'expression: « Il en donne les $\frac{3}{4}$ à ses amis»,
- un problème partie-tout, avec ce qu'Hugo avait avant et ce qui lui reste après qu'il ait donné à ses amis.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ATYPIQUES

Hugo a 36 bonbons. Il en donne les $\frac{3}{4}$ à ses amis.

Combien de bonbons lui reste-t-il ?



Ce problème est complexe car :

- il y a un partage en 4 évoqué dans l'expression: « Il en donne les $\frac{3}{4}$ à ses amis»,
- un problème partie-tout, avec ce qu'Hugo avait avant et ce qui lui reste après qu'il ait donné à ses amis.