LES REPRESENTATIONS DES NOMBRES

Les nombres interviennent sous divers aspects dans l'environnement de l'enfant dès l'école maternelle. On peut en distinguer trois :

– sous forme *verbale*. Il s'agit de la liste des **noms de nombres,** qui permet de compter. Cette liste est entendue et étudiée à l'école, mais largement aussi au dehors, dans la famille notamment où elle est bien souvent répétée et renforcée ; cette pression sociale (comme celle qui s'exerce à propos de la lecture) en fait souvent pour l'enfant un instrument de promotion : savoir compter, c'est être grand.

– sous forme *imagée* (visuelle) de “constellations”. C’est le cas des dominos ou des cartes à jouer, qu’un rapide apprentissage fait lire globalement, plutôt qu’analyser.

– sous une forme *écrite* symbolique, **chiffrée.**

Les nombres, comme les mots, participent de l'environnement écrit de l'enfant, et il est amené à reconnaître des écritures chiffrées dans de nombreuses circonstances : numéros des immeubles, ou des étages dans un ascenseur, indications du calendrier, pagination d'un livre, etc. C'est donc une occurence des nombres que l'enfant appréhende d'abord par sa *fonction.*

Les représentations mentales

Les différents usages des nombres (comptage, dénombrement, calcul…) font intervenir des évocations mentales. Ces *représentations internes* évoluent et se diversifient à mesure que s’étendent les connaissances sur les nombres. L’objet de ce qui suit est de recenser ces différents types de représentations et leur usage. Le développement d’une représentation nouvelle se conjugue avec les précédentes, sans les remplacer, ni se juxtaposer exactement. Cette évolution ne s’achève pas à la fin de l’école : l’usage des nombres négatifs (au collège), puis des Réels (au lycée) engendrent de nouveaux enrichissement de ces représentations. Il n’est question ici que des nombres entiers naturels.

[I] Premier aspect **sériel** : la **liste** verbale

Il s’agit de la mémorisation des mots qui désignent les nombres, et qui fonctionnent comme des noms propres. Cet aspect est essentiellement verbal/auditif. Il s’agit d’une **liste** : ces mots ne sont disponibles qu’à partir de **un**, *unité par unité, dans l’ordre croissant* (sans saut, ni retour).
Cette liste sert d’appui à la procédure d’énumération. C’est le premier outil qui permet à l'enfant de dénombrer. Il faut observer que cette représentation n'induit pas une vraie relation d'ordre : il n'y a pas de *survol* de la liste, ni par conséquent de comparaison entre deux éléments non successifs. Dans un premier temps l'opérateur “suivant” n'est pas réversible : la question « *qu'y a-t-il avant sept ?* » induit un recomptage de la liste à partir de **un**.

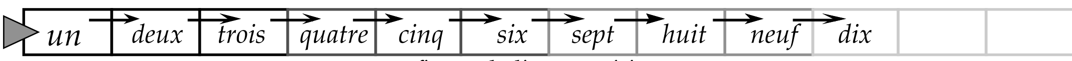

fig. 1 : la liste numérique

Il faut aussi insister sur l'aspect **local** de cette représentation. Pour le jeune enfant cette liste est sûre au début, puis incertaine ensuite. Ainsi un enfant de quatre ans pourra dire : “*un, deux, trois, quatre, douze, dix, vingt et un, vingt deux…*” avec la conviction qu'il sait compter. L'assurance de l'enfant quant à cette liste se développe progressivement. Dans la mesure où elle est mémorisée et non construite, les nombres “lointains” sont d'abord incertains, puis inconnus.

On pourrait distinguer plusieurs sous-étapes ultérieures, à mesure non seulement que la liste s'étend, mais surtout que se développent de nouveaux opérateurs.

[Ib] Cette étape consiste à pouvoir évoquer la liste, non seulement à partir de **un**, mais avec n'importe quel point de départ (toujours de façon croissante et pas à pas). On appelle maintenant “surcomptage” cette compétence. *Compter sur ses doigts* est caractéristique de cette étape de même que la procédure classique pour rendre la monnaie qui est toutefois enrichie de quelques procédures de “sauts” (ajouter 10 ou 100 par exemple).

[Ic] Autre sous-étape : la capacité de compter à rebours (lecteur, essayez de réciter l'alphabet de Z à A…) ou encore de deux en deux… Ces étapes sont intermédiaires entre [I] et [II].

[II] Premiers aspects visuels : la reconnaissance globale

Il est possible d'identifier une collection sans la dénombrer si le nombre de ses éléments n'excède pas trois ou quatre. Au delà de quoi, on recourt à une décomposition en diverses parties, ou au dénombrement un à un, à moins que cette configuration ne soit disposée de façon particulière, comme c'est le cas pour les dominos (fig.2) ou pour les cartes à jouer.

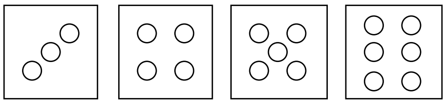

fig. 2

fig. 3

fig. 4

Ces configurations particulières, culturelles, ou “constellations” font l'objet d'une fréquentation ou d'un apprentissage précoce, qui permet généralement de pratiquer divers jeux (jeu de l'Oie, Bataille etc.) avec des dés ou des cartes à jouer en grande section (quelquefois plus tôt). En psychologie, cet aspect est nommé “*subitizing*”que l'on peut traduire approximativement par *perception (ou reconnaissance) globale*. Des études précises font apparaître que cette capacité permet à 4 ans d'appréhender des collections de trois objets et qu'elle s'accroit peu ensuite. On peut inclure dans ce type de représentation les figurations analogiques (fig.3) ou digitales (fig.4). Dans le cas de configurations plus complexes (mais pas nécessairement plus nombreuses), on procède soit à un dénombrement, soit à une décomposition en parties identifiables globalement, puis à un appel à des résultats mémorisés [Répertoire].

[III] Répertoire de résultats

Quelques résultats, comme « *2 et 2, 4* » ou « *3 et 2, 5* » sont déjà connus dès l'école maternelle, prélevés dans l'environnement et/ou renforcés par l'école. Il s'agit d'énoncés appris “par cœur” (c'est-à-dire auditivement) et faiblement en rapport les uns avec les autres ; ils ne s'agit pas encore d'un *calcul*, puisque ces énoncés sont lacunaires et non coordonnés. Cet aspect est systématisé par la mémorisation des décompositions de **dix**, puis la construction des “Tables” (d'addition puis de multiplication).
Toutefois, il convient de distinguer ce qui concerne les “Tables” additives et les “Tables” multiplicatives. L'expérience (étude statistique des délais de réponse) montre que :

- les “doubles” jouent un rôle particulier. Ce sont les résultats les plus rapidement mémorisés.
- les résultats additifs sont majoritairement *reconstruits* jusque vers 8 ans ; c'est-à-dire que l'enfant “surcompte” mentalement à partir du plus grand nombre, plutôt qu'il ne rappelle un résultat stocké en mémoire ; après quoi les procédures de rappel sont majoritaires. Bien entendu, ces études font état de résultats statistiques, et non d'analyses individuelles.
- En ce qui concerne les résultats multiplicatifs, l'évolution est probablement la même, avec un retard de quelques années (reconstruction d'abord, puis rappel). Néanmoins les délais (et la sûreté du résultat) sont très variables.

Remarque : le Jeu de l'Oie est un exemple de rencontre de trois représentations différentes.

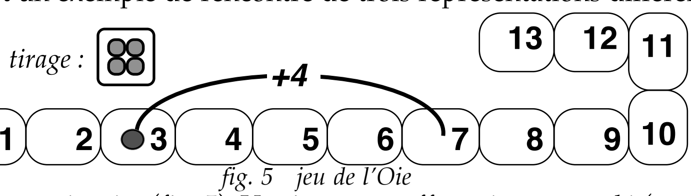

fig. 5 jeu de l'Oie

La piste comporte des cases numérotées (fig. 5). Un tirage est effectué avec un dé (constellation). L'avancée du pion est déterminée soit par un calcul (« 3+4 =7 »), soit en surcomptant à partir de 3 (“*quatre, cinq, six, sept*”).

[IV] Numération

C'est au C.P. que l'on systématise l'étude de la numération **écrite** (chiffrée). Il en résulte une nouvelle représentation des nombres, qui fait découvrir aux enfants que l'on peut écrire des nombres “*aussi grands que l'on veut*”, alors que les représentations précédentes avaient par définition un champ limité. Cet aspect est de nature **algorithmique** : la production de nouveaux nombres est gouvernée par une régularité : tout se passe entre 20 et 30 comme entre 30 et 40, comme entre 40 et 50…

On peut mettre en relation représentation chiffrée et représentation analogique :

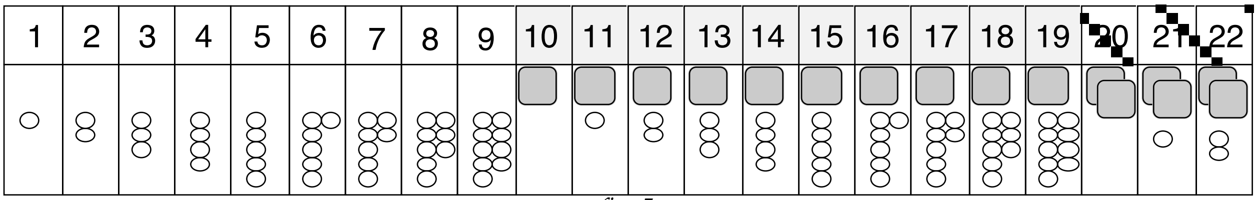

fig. 5

Toutefois, cette numération écrite dont le champ est illimité est assortie d'une numération **orale** qui n'est pas aussi simple, parce que moins régulière, surtout en français (irrégularités entre dix et vingt, puis entre soixante-dix et et quatre vingt dix-neuf).

[V] Second aspect sériel : la graduation.

La suite des nombres est structurée à la fois par un **rythme** (grâce à la numération) et par des *opérateurs*. : retrancher 1, ajouter 10, retrancher 100, etc. correspondant à des sauts en avant ou en arrière. Ces opérateurs sont composables, et au moins partiellement réversibles : il devient donc possible de parler **d'opération**, au sens où J. Piaget emploie ce terme.

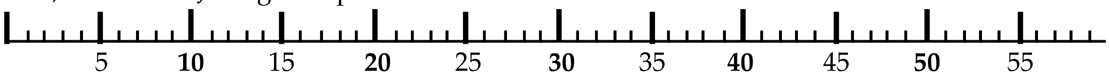

fig. 6 graduation

Ainsi l'exemple ci-dessous (fig. 7) indique une façon parmi bien d'autres d'ajouter 16 : "avancer" de 20 et "reculer" de 4.

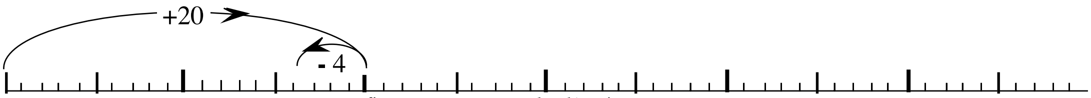

fig. 7 un exemple d'opérateur +16

L'exemple de la fig. 8 répond à la question "39 – 18 ?".

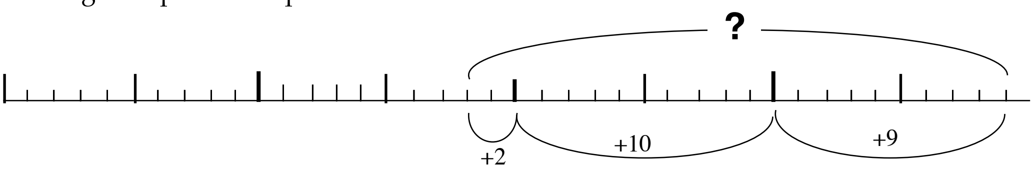

fig. 8 un exemple de calcul de 39–18

Cette représentation traduit la question en terme de *distance* entre deux points : aller de 18 à 20, puis de 20 à 30, puis de 30 à 39. Il y a bien d'autres façons d'utiliser cette graduation en vue d'obtenir le résultat de ce calcul. Par exemple : 39 – 18 = (30–10) + (9–8) = 20 + 1 = 21 ; 39 – 18 = (39–10) – 8 = 29–8 = 21 ; 39 – 18 = (39–8) – 10 = 31–10 = 21 ; 39 – 18 = (39–20)+2 = 19 + 2 = 21…

Ce type de représentation est typique du **calcul mental** pourvu toutefois que celui-ci ne soit pas une simple transposition du calcul écrit. Le "rythme" sur la graduation est fortement lié à l'estimation d'**ordre de grandeur** (ajouter 98, c'est ajouter 100 et retrancher 2). Cela suppose également la réciprocité exacte des opérateurs "ajouter" et "retrancher", et la mise en place de tactiques de **relais** et de **voisinage** ; ainsi 48 étant proche de 50, on essaye d'opérer d'abord sur 50 puis on ajuste le résultat. Toutes les propriétés opératoires sont mises en jeu. On peut dès lors parler de **calcul**. L'élaboration de cette représentation pourrait commencer au CP, mais sa pleine efficacité relève du C.E et surtout du C.M.

[VI] Techniques de calcul écrit.

Le dernier aspect développé à l'école est celui des techniques écrites. Celles-ci s'appuient sur des **algorithmes** pratiques (règles) : la signification et l'ordre de grandeur des nombres sont provisoirement évacués ; on les considère chiffre par chiffre. Lorsqu'on effectue une addition avec retenue, ou une soustraction, ou une multiplication, on opère de droite à gauche, alors que la direction de lecture ordinaire et le calcul mental procèdent de gauche à droite. Ces techniques ne peuvent pas être maîtrisées sans qu'il soit fait appel en amont et en aval à d'autres représentations numériques :

– d'une part les énoncés mémorisés [Répertoire] sont indispensables.

– par ailleurs pour s'assurer que le résultat ne peut être obtenu rapidement sans poser l'opération (il est ainsi inutile de “poser l'opération” pour calculer 34 ∞ 10 ou 17 + 3…)

– enfin pour avoir une idée de l'ordre de grandeur du résultat (appel à la “graduation”)

Cette *représentation algorithmique* estla plus éloignée de tout support concret (puisque l'on opère ni sur des grandeurs, ni sur des nombres, mais sur des *chiffres*) ; elle s'appuie cependant sur une construction qui justifie et permet éventuellement de rappeler ou de retrouver les règles qui la constituent.

Toutes les représentations évoquées ci-dessus ne sont pas disjointes. Même si elles ne se développent pas simultanément, elles font appel les unes aux autres. Ainsi, pour évaluer une collection dont la disposition est quelconque, on procède par décomposition en collections repérables [*constellations*] et appel au *répertoire* additif. A aucun moment l'une de ces représentations n'est caduque : il arrive à tout adulte d'utiliser la représentation [Liste] (en comptant sur les doigts) au cours d'un calcul écrit [algo. écrits] par exemple pour le décompte des retenues.

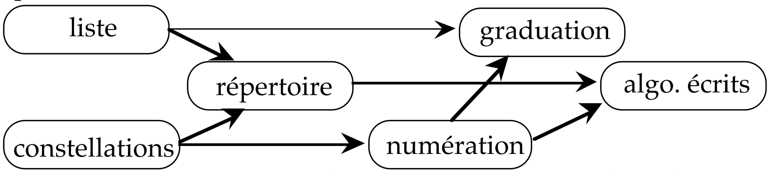

fig. 9 émergence et coexistence des différentes représentations

Toutefois chacune de ces représentations présente un domaine de validité optimum : compter sur les doigts requiert peu d'effort mais n'est plus efficace dès lors que les nombres en jeu dépassent la dizaine; les répertoires mémorisés (“tables”) ne concernent généralement que les nombres à un chiffre : accroître ce *répertoire* mobilise davantage la mémoire, mais permet d'économiser sur le temps de traitement réclamé par les *algorithmes*. Par conséquent, c'est en proposant des situations de calcul de plus en plus complexes que l'on justifie la nécessité d'élaborer des représentations (donc des outils de calcul) plus puissantes. Inversement, l'utilisation d'une représentation élaborée est inutilement “coûteuse” si le problème posé ressortit d'une représentation plus simple.

Le choix d'une représentation dépend de la situation donnée. Un **constat** (représentation d'une situation donnée) mobilise moins de “charge mentale” qu'une situation problématique (recherche d'une information manquante). La capacité d'évoquer telle ou telle représentation (plus adéquate ou plus économique) signale une bonne coordination des représentations : c'est cette variabilité qui doit être recherchée tout au long de l'école élémentaire.

Ordre de grandeur

Les représentations disponibles ou choisies dépendent largement, non seulement des types de situations, mais plus encore de l'ordre de grandeur des nombres en jeu. On peut distinguer très approximativement quatre domaines :

• **zone immédiate.** Les collections que l'on peut appréhender sans dénombrement (ce qui n'interdit pas d'y recourir dans certain cas); elle s'étend jusqu'à trois ou quatre y compris pour les adultes.

• **zone proche.** Les quantités que l'enfant est sûr de pouvoir dénombrer (qu'il y parvienne ou non), et sur lesquelles il pense connaître des résultats. Cette zone peut s'étendre en moyenne section jusqu'à cinq ou six, ou même jusqu'à la dizaine. Au C.P. elle doit évidemment dépasser la dizaine.

• **zone moyenne.** L'enfant utilise ses représentations, ou ses procédures de comptage, mais comme un *défi*, sans être assuré de réussir. Dans cette zone moyenne, les résultats connus sont très lacunaires : il est difficile de classer les nombres, et de s'écarter des représentations [I] et [II]. Elle peut s'étendre en grande section de la dizaine à la cinquantaine ; mais son contour est très incertain et instable. L'environnement de l'enfant, en particulier la fréquentation du calendrier permettrait de l'étendre jusqu'à la trentaine.

• **zone des “grands nombres”.** C'est la zone lointaine et illimitée du “beaucoup” dans laquelle toute précision est peu significative, et toute estimation découragée. Il y a une dissociation, même chez les adultes sachant calculer, entre la capacité (algorithmique) à calculer et l'estimation préalable, puisque cette capacité finit par fonctionner hors de toute évocation des nombres. La délimitation de cette zone est donc beaucoup plus psychologique que technique.

F. Boule