Le calcul mental à l'école

Introduction

Ma surprise a été grande, en 1979 (elle ne s'est pas entièrement dissipée) en dépouillant, dans le cadre d'une étude à l'IREM de Lille, les résultats produits par écrit par trois centaines d'enfants de CE2 ou de CMl au calcul suivant :

$$\boxed{3 \times 5 \times 4 =}$$

Vous avez certainement trouvé le résultat. J'ai relevé pour ma part *trente-sept* résultats différents parmi les réponses à ce test. En voici quelques-unes : 19, 23, 35, 50, 60 (n'en soyons pas surpris), 75, 1512, 3004 et même 60460, qui aurait dû sembler légèrement invraisemblable. Gardons-nous d'en rire : il y avait 43% de réponses exactes en CE2 et 53% en CM1. Mais soit : c'était il y a longtemps. Les calculettes n'avaient pas encore eu le temps de tout arranger. J'ai tenté ailleurs d'interpréter ces résultats, et je n'y reviendrai pas. J'ai de plus fraîches moissons à vous offrir.

Les nouveaux programmes de l'école

Les nouveaux programmes de l'école primaire reconnaissent une place importante au calcul mental. « *Les compétences en calcul mental […] sont à développer en priorité, notamment à travers le calcul réfléchi. […] Au cycle 2 le calcul réfléchi occupe la place principale.* » Cette recommandation, qui a pu paraître méconnue depuis deux ou trois décennies n'est pourtant pas nouvelle. Elle est constamment réaffirmée par les Programmes dès le début du XX^{e} siècle : « *Les exercices de calcul mental figureront à l'emploi du temps et ne devront pas être sacrifiés à des occupations considérées comme plus importantes : aussi bien les avantages du calcul mental ne se bornent pas aux services qu'il rend chaque jour à celui qui s'est familiarisé avec sa pratique ; il constitue une excellente gymnastique pour l'assouplissement et l'adresse de l'esprit aux prises avec les questions mathématiques.* » (1909) ; mais aussi dans la Réforme des Mathématiques modernes : « *Il est essentiel, et cela à tous les niveaux, que les élèves calculent mentalement et par écrit avec aisance et sûreté […]. La valeur éducative des exercices de calcul mental réside tout autant dans la manière de conduire le calcul que dans sa rapidité.* » (Commentaires des Programmes de 1970).

Pour ma part j'aime à citer cet extrait d'un propos qu'Alain publia en 1929 :
« *Le calcul mental est une partie brillante et neuve de notre enseignement. Le maître et l'élève y inventent sans cesse de nouveaux moyens de courir sans se tromper. Ce genre d'exercice est sain pour l'esprit; c'est mépriser la fonction mécanique, c'est la gouverner de haut, c'est se dépêtrer […]. La vitesse ne doit jamais être séparée de la sûreté. Comment donc faire ? Il faut seulement choisir les exercices de façon que l'apprenti puisse aller très vite sans se tromper ; et en somme, au lieu d'aller du lent au vif, ce qui est trompeur, il faut aller, et toujours en vitesse, du simple au complexe. Et j'ai remarqué que cette dure méthode plaît, et qu'elle forme le caractère aussi. On apprend à compter comme on apprend à traverser une rue ; il ne s'agit pas d'aller lentement ; mais il faut saisir le moment, et apprendre à disposer de soi, et faire vite, sans aucune peur.* »

Définition du calcul mental, calcul réfléchi…

Les termes, d'une époque à une autre ont quelque peu varié. En première approximation, on est tenté d'opposer le calcul mental au calcul *écrit ou instrumenté*. Mais ce n'est pas dire que tout se passe sans écrire. On y reviendra. Le calcul écrit ("l'opération posée") requiert la connaissance des tables ; c'est déjà du calcul. On peut même soutenir que le calcul commence dès lors que l'on est capable d'énoncer la suite des entiers dans l'ordre croissant ou décroissant, c'est-à-dire *établir des liens* entre les éléments numériques. Mais le calcul écrit ne dispense pas de calcul mental, bien au contraire ; la technique écrite française traditionnelle de la division, omet les soustractions intermédiaires, qui relèvent donc du calcul mental. Le déficit de maîtrise du calcul mental fragilise gravement l'apprentissage des techniques écrites. L'expérience atteste, comme on va le voir, que les enfants ont souvent tendance à faire du calcul mental, en appliquant mentalement les algorithmes écrits. Ceci est dû très probablement à un établissement insuffisant du calcul mental *préalablement* à l'apprentissage des techniques écrites (c'est à dire dès le cycle 2). Il importe clairement que ces techniques écrites s'appuient sur une pratique du calcul mental au lieu de s'y substituer.

Le propre du “calcul machinal” qu’il s’agisse d’une calculette ou d’un algorithme appliqué avec papier et crayon, c’est qu’il délaisse l’intuition des nombres, l’ordre de grandeur ; il met en œuvre un algorithme uniforme sur des *chiffres* et c’est précisément le nœud de son efficacité. Le calcul mental restitue une part d’initiative et de choix ; il opère sur des nombres et permet d’enraciner l’ordre de grandeur, le sens des opérations et leurs propriétés algébriques (commutativité, associativité, distributivité).
L’expression la plus constante, celle de “calcul mental”, signifie ainsi qu’entre l’énoncé du problème et l’énoncé du résultat, on renonce à matérialiser tout algorithme. Ce qui ne signifie pas nécessairement qu’aucun support écrit ne peut intervenir dans la consigne, la formulation du résultat voire même dans le cours du calcul. On tiendra pour équivalente l’expression “calcul réfléchi”, qui est clairement préférable à celle de “calcul rapide” autrefois en usage. On signifie ainsi l’importance que l’on donne à la **méthode** plutôt qu’à la rapidité d’exécution, au moins en ce qui concerne les calculs complexes.

Les objectifs assignés au calcul mental sont de plusieurs ordres

Objectifs pratiques

Il s’agit de mettre en place des moyens efficaces de calculer, utiles à la vie courante, en l’absence de supports ou d’instruments. Même si l’usage de la calculette est de plus en plus répandu, il demeure nécessaire de savoir calculer sans elle, ou, à tout le moins, de pouvoir effectuer un calcul approché. C’est là d’ailleurs un moyen efficace de contrôle, une erreur de manipulation étant toujours possible. On distinguera, parmi les objectifs pratiques :

> l’automatisation des calculs simples
> la maîtrise du calcul approché
> la diversification des stratégies de calcul complexe

Objectifs théoriques

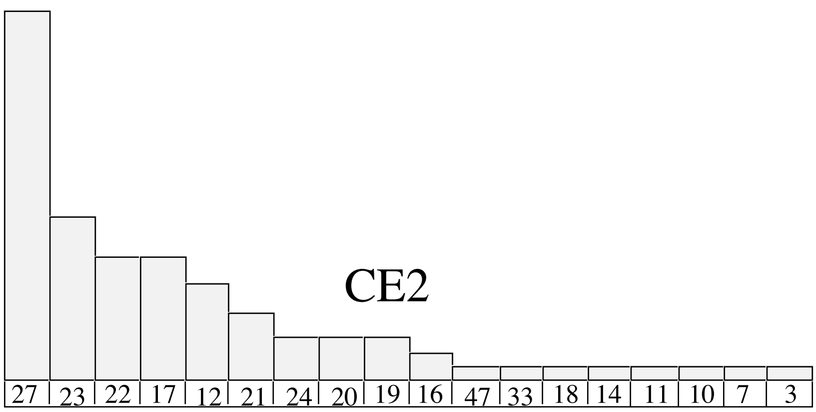
Au-delà de vertus traditionnellement rappelées (“*gymnastique intellectuelle*”, “*adresse de l’esprit*” et même “*formation du caractère*”, ou plus précisément “*développement de l’attention et de la mémoire*”), le calcul mental vise à établir et renforcer des représentations numériques et la structuration de l’ensemble des nombres. C’est en cela qu’il contribue à une meilleure compréhension des opérations numériques et leurs propriétés principales ; toutes connaissances nécessaires en particulier pour l’amélioration du calcul écrit ou instrumenté.

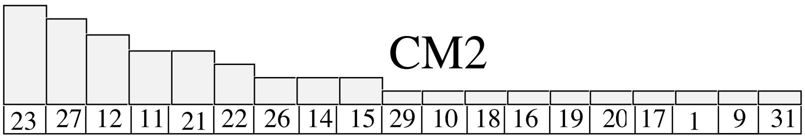
Une première analyse d’erreur : 31–18

Mais commençons d’abord par un exemple. Dans un cadre expérimental, j’ai demandé à plusieurs centaines d’enfants le résultat de l’opération 31 – 18. L’énoncé était présenté en ligne sur un écran d’ordinateur ; la réponse devait être frappée au clavier ; la réponse et le délai étaient enregistrés.

	CE2	CM2
taux d'erreur	0,71	0,36
délai moyen (s.)	24,8	14,5

Le plus surprenant n’est pas ce tableau (qui porte sur environ 300 réponses) mais le catalogue des réponses erronées. Les voici, présentées dans l’ordre de fréquence décroissante, en CE2 et en CM2.





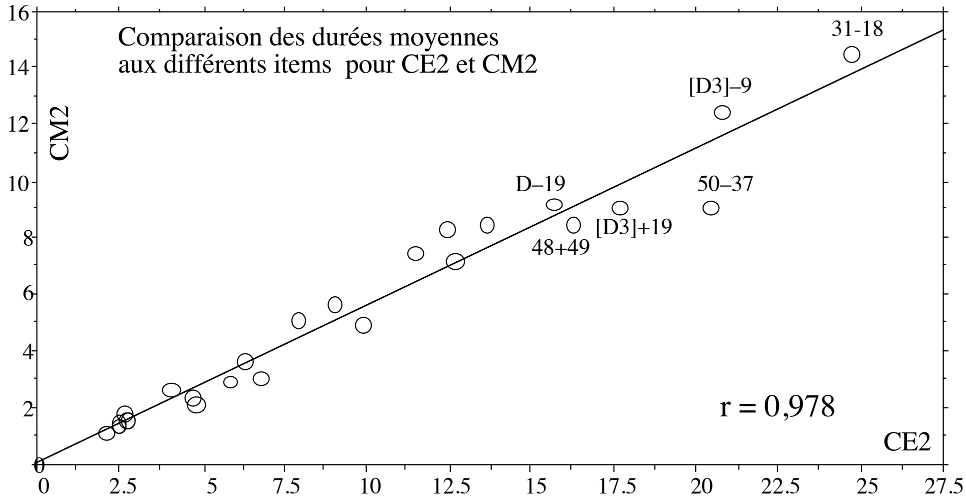
Ceci fait clairement apparaître que non seulement la fréquence mais les types d'erreurs sont différents. Il apparaît néanmoins que l'éventail des erreurs est très large en CE2 comme en CM2 (où les fréquences sont moins dispersées). On dispose pour tenter d'interpréter les erreurs de l'entretien individuel lors duquel chaque enfant a expliqué sa démarche. Tous ces entretiens ne sont pas intelligibles, et ils ne portent que sur un tiers des opérations calculées. Ils permettent néanmoins d'interpréter une majorité des erreurs.

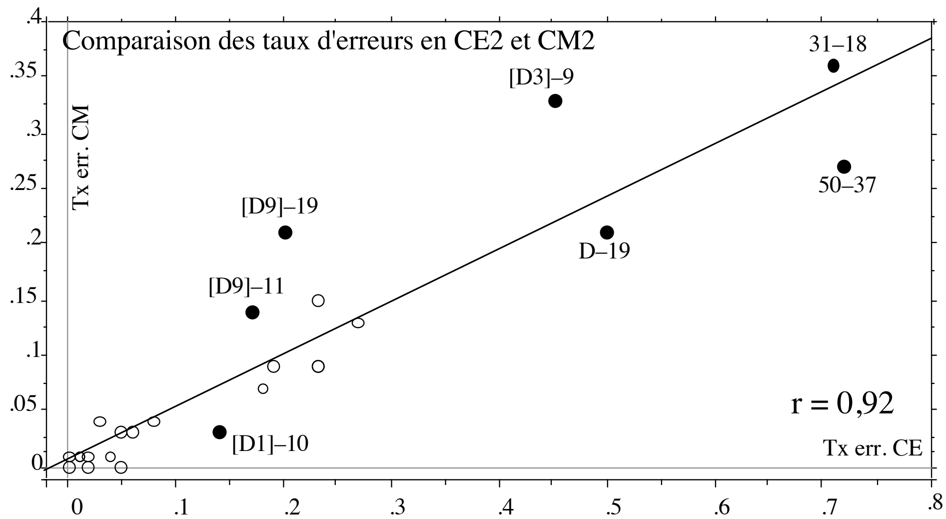
Ainsi, l'erreur la plus fréquente en CE2 est aisément analysable :
> [27] : *"on ne peut pas enlever 8 de 1; j'enlève 1 de 8, cela fait 7; et puis 1 de 3, cela fait 2"*. Néanmoins, il arrive que ce calcul (en CM2) soit exprimé autrement : *"de 1 à 8, il y a 7; de 1 à 3, il y a 2"*;
> [23] provient de l'omission de la retenue : on ne peut enlever 8 de 1; on enlève alors 8 de 11, cela fait 3; puis 3 –1 = 2.
> [17] provient de la conjugaison des deux démarches précédentes (retournement des unités ; omission de la retenue) : 8 –1 = 7, puis 3 – 2 = 1
Peuvent s'ajouter à ces schèmes des erreurs de calcul (ou de rappel) : 11– 8 (ou bien "de 8 à 11") est donné égal à 2 ou bien à 4. Ce qui renseigne sur les réponses > [12], [14], [22], [24].
Un autre facteur d'erreur concerne la perte du signe opératoire : commencée en soustraction, le calcul s'achève en addition en passant à la seconde colonne.
>[29] : de gauche à droite, 3 –1 = 2, puis 1+ 8 = 9
>[19] : on repère une retenue, puis on opère de gauche à droite ; 3 –1 –1 = 1 ; puis 1+ 8 = 9. Ou encore > [47] en opérant de droite à gauche, 8 –1 = 7, puis 3+1 = 4.
ou encore >[9] : la chaîne d'opérateur –20 +2, en cours de traitement devient –20, suivi de –2.

L'analyse qui précède rend déjà compte de plus de 80% des erreurs en CE2, et environ 60% en CM2.
On peut difficilement espérer une interprétation rationnelle de toutes les réponses erronées. Les conditions d'expérimentations elles-mêmes peuvent en susciter, comme la frappe d'une touche à la place d'une autre ; toutefois, quand l'enfant s'en rendait compte immédiatement, ce "repentir" a été autorisé. Il reste que des résultats tels que [10], [1], [31] demeurent mal interprétables.
Autre chose doit surprendre.
Les opérations étaient posées en trois blocs et celle-là figurait dans les trois blocs. On dispose donc de trois réponses par enfant. Il est devenu habituel de dire que les erreurs sont instructives, voire utiles, et toujours logiques. Si un enfant répond trois fois de suite 27, l'interprétation est simple : il dispose d'une procédure ; elle est identifiable et erronée. Mais s'il fournit trois résultats différents, l'interprétation n'est pas simple. Et cette **instabilité**, jamais analysée, ni même signalée dans la littérature met clairement en défaut la théorie de l'«erreur logique ».

Cadre expérimental

Depuis plus de vingt ans une littérature très abondante concerne les "calculs arithmétiques simples" c'est à dire du type □●□ ; où □ représente un chiffre et ● un signe opératoire ; il s'agit de ce que le langage ordinaire appelle les "Tables". Une chose importante consiste à savoir si la réponse à une question comme " »7 + 5 = ... » est obtenue par un comptage, c'est-à-dire une procédure, ou bien récupérée en mémoire, dans un répertoire de connaissances. Chaque calcul fourni par un enfant ne produit que deux indications objectives : son résultat et le délai de calcul. On peut aussi enregistrer des comportements, inviter l'enfant à parler ou s'entretenir avec lui. Mais ces éléments ne sont pas vraiment objectifs, ni toujours interprétables, et peuvent apporter des perturbations.
Les premiers modèles envisagés prennent en compte les délais de résolution. Groen & Parkman ont montré que le modèle T = a × MIN(m,n) + b [choisir le plus petit terme, pour l'ajouter à (surcompter à partir de) l'autre] se révèle le meilleur (80% de variance expliquée) chez les jeunes enfants. C'est vers le niveau CE2 que l'enfant passerait d'une stratégie *reconstructive* (procédurale, comme le surcomptage), à une stratégie *reproductive* (récupération d'un résultat stocké sous forme déclarative). Toutefois, cette interprétation ne vaut plus dès lors que l'on dépasse la dizaine [Boule, 1997]
L'expérimentation impose deux faits avec évidence.
• Les délais moyens en CE2 et en CM2 sont fortement corrélés ; c'est d'autant plus remarquable que les uns et les autres n'emploient pas les mêmes stratégies ; les élèves de CM2 vont deux fois plus vite.
• Les relations entre taux d'erreur en CE2 et CM2 sont presque aussi fortement corrélés, pour chaque type d'opération. Ces deux éléments convergents suggèrent une échelle empirique de difficulté, en fonction de laquelle on peut classer les opérations proposées. Vous remarquez que « 31–18 » parmi celles-ci a été l'opération la plus difficile.





Hiérarchie

		D3+1	D9+1	D+10	D1−1	D+9	D−10	D9+5	D+11	D1+10	D3+5	D1+9	D−1
CE2	Tx err.	0	0	0,01	0,01	0,02	0,02	0,03	0,04	0,05	0,05	0,06	0,08
	T.Moy.	2,7	2,5	2,1	2,6	2,5	2,8	7,9	4,7	4,1	6,8	5,9	4,8
CM2	Tx err.	0,01	0	0,01	0,01	0,01	0	0,04	0,01	0	0,03	0,03	0,04
	T.Moy.	1,6	1,5	1,1	1,8	1,4	1,6	5,1	2,4	2,6	3,1	3	2,1

	D1–10	D9–11	D3–11	D1+19	D9–19	D–9	D3+19	D9+11	48+49	D3–9	D–19	31–18	50–37
CE2	0,14	0,17	0,18	0,19	0,2	0,23	0,23	0,23	0,27	0,45	0,5	0,71	0,72
	6,3	13,7	12,7	11,5	12,4	9	17,7	9,9	16,3	20,8	15,7	24,7	20,5
	0,66	1,38	1,29	1,17	1,39	0,94	1,87	1,04	1,78	2,2	1,61	2,59	1,94
CM2	0,03	0,14	0,07	0,09	0,21	0,09	0,09	0,15	0,13	0,33	0,21	0,36	0,27
	3,7	8,5	7,2	7,5	8,3	5,6	9,1	5	8,5	12,5	9,2	14,5	9,1

Analyse d’erreurs
Une étude portant sur plus de 130 erreurs répertoriées à l’opération 31–18 ainsi qu’à quelques additions (calcul mental en CE2 et CM2) conduisent à la typologie indiquée ci-dessous :

A — Retenue omise
« 11–8 = 3
3–1 = 2
résultat 23 »

B — Inversion des unités
« 1–8, on ne peut pas
alors 8–1 = 7
3–1 = 2
résultat : 27 »

C — Inversion des unités, et retenue
«1–8, on ne peut pas
alors 8–1 = 7
3–1–1 = 1
résultat : 17 »

D — Erreur de comptage ou de récupération
« 11–8 = 2 »

E — Juxtaposition
« 63+19 = 712 »

H — *Inversion du résultat*
« 11–8 = 3
3–1 = 1
résultat : 31

F — *Interruption de calcul*
31–10 (–8)
résultat : 21
31 + 2 (–20)
résultat : 33

G — *Affaiblissement du signe*
31–20+2 devient
31–20–2
31–10–8 devient
31–10+8

typologie des erreurs (calcul additif)

Les erreurs A, B, C représentent à elles seules près de la moitié des erreurs répertoriées. Les erreurs F, G, H sont plus typiquement représentatives du calcul mental ; si elles sont occasionnelles, la procédure sous-jacente n’est probablement pas en cause, mais on peut imaginer que la difficulté provient du traitement en Mémoire de Travail. On rencontre les autres aussi bien en calcul écrit qu’en calcul mental – dans la mesure où bien souvent celui-ci reproduit mentalement les algorithmes de l’écrit.
Il peut s’agir d’erreurs procédurales systématiques (c’est typiquement le cas de B et C, et probablement de A), ou bien le fait d’un “répertoire” instable ou inexact (D). L’erreur E relève de la numération, et d’une remédiation particulière.

Les moyens de travailler

Supports : frise, spirale, tableau, échelles.
Ces supports peuvent être collectifs (affichage) ou individuel (mais astreints à certaines restrictions).

Séquence de calcul mental
Les séquences de calcul mental exigent une attention soutenue ; il est préférable qu’elles soient brèves (cinq à dix minutes) et *fréquentes* (si possible quotidiennes). Ceci n’exclut pas que du calcul mental intervienne (toujours brièvement) sous des formes variées et pas seulement dans le cadre des mathématiques. Son intérêt pratique majeur est son utilité pour la vie quotidienne. C’est donc là qu’il faut trouver des occasions de le faire intervenir. Des situations de jeux, stratégiques ou non, utilisant des supports classiques (dés, dominos, cartes…) ou des supports spécifiques mettent en jeu des décompositions numériques ou des calculs simples ; ce sont des occasions de rappel des résultats arithmétiques simples et matière à calculs. Ces situations peuvent intervenir sous forme d’atelier, en groupes restreints, ou bien en fond de classe.
Une séquence de calcul peut être conduite avec la classe entière, ou par demi-groupe. Il est souhaitable qu’une séquence débute par une activité très facile, quasi-rituelle et surtout destinée à focaliser l’attention ; ce peut être : donner le complément à dix, ou bien le double d’un nombre inférieur à 20, ou encore compter de 2 en 2 ou de 5 en 5 à partir d’un départ choisi au hasard, ou encore dénombrer une collection de points sur une carte présentée brièvement.
La consigne est orale, pourvu que la « traduction » ne pose pas problème (nombres inférieurs à 70) ; en petit groupe, la réponse est individuelle, et peut être orale ou écrite ; en plus grand groupe mieux vaut une réponse écrite (papier ou ardoise). Dans ce type de calcul simple la *rapidité* est un objectif visé, car il s’agit de faire maîtriser un répertoire avec sûreté.

Une seconde phase consiste à mettre en œuvre des procédures un peu plus complexes et à les entraîner jusqu’à ce qu’elles deviennent routinières dans les cas où elles sont préférables. Ainsi pour calculer 23+9 ou 44+9 il est commode d’utiliser la suite d’opérateurs +10 –1. C’est là une phase d’apprentissage, élaborée en grand groupe, et conclue par une synthèse à la fin de cette phase. Dans ce cas (et le suivant) il n’est pas souhaitable que la consigne soit orale, parce que cela implique des problèmes de « traduction » numération orale/écrite, qui ajoutent à la charge cognitive ; mieux vaut une consigne écrite en ligne.

Une dernière phase présentera un "problème de calcul", c'est-à-dire une opération pour laquelle il n'existe pas de stratégie clairement privilégiée (ex. 348 + 257). La consigne est évidemment écrite en ligne au tableau. Les réponses sont présentées au tableau. Dans un tel cas, la rapidité d'exécution n'est nullement un objectif, et l'on favorisera au contraire l'explicitation des stratégies des uns et des autres. Ceci dans le but d'en faire découvrir et ultérieurement utiliser de nouvelles. On peut également présenter à ce moment un défi à la classe entière, ou une compétition par équipes avec des règles simples.

Trois remarques s'imposent concernant ce type de séquence.

1. Calculer mentalement ne signifie pas que l'on renonce complètement aux supports ou à l'écriture. Cela impose seulement de renoncer aux algorithmes de l'écrit (opérations posées). L'établissement de représentations (mentales) des nombres s'appuie en premier lieu sur la fréquentation de supports (frise, spirale, tableau, échelles). C'est l'usage et la familiarité de ces supports qui favorise l'intériorisation de représentations, et l'élaboration de procédures ayant du sens. Ces supports peuvent être affichés au mur, ou bien être disponibles individuellement, *sous certaines conditions* : il doit être admis en effet qu'ils constituent un recours temporaire. Par ailleurs, il est inutile et préjudiciable de surcharger inutilement la mémoire : mieux vaut à cet égard un énoncé écrit plutôt qu'oral, autoriser la notation écrite de résultats intermédiaires.

2. Il n'est pas équivalent de poser la question « *calculer 17 + 23* » et le problème « *Arnaud avait 17 billes et en gagne 23 ; combien en a-t-il maintenant ?* ». Chacun de ces énoncés active une représentation de la tâche à accomplir. Dans le premier cas elle porte sur des nombres "purs", dans le second elle s'appuie sur l'évocation d'un certain champ de réalité. L'expérience montre que le recours a un "habillage" peut stimuler des procédures de résolution qu'un énoncé purement numérique ne susciterait pas.

3. L'explicitation et la confrontation de stratégies variées sont intéressantes, mais doivent répondre à un dosage prudent. Les meilleures stratégies sont d'abord celles (si elles sont exactes) en lesquelles on a confiance parce que leur « coût » est moindre. Une nouvelle stratégie n'est pas immédiatement économique, et le choix lui-même a un coût. Il est donc préférable de renforcer les stratégies connues (si elles sont exactes), puis d'aborder lentement des stratégies nouvelles, grâce à des opérations où elles sont plus pertinentes, et de les renforcer une à une.

François Boule
francois.boule@neuf.fr

Bibliographie

BOULE, F. *Performances et démarches de calcul mental au cycle 3*, Thèse, P.U. du Septentrion, 59654 Villeneuve d'Ascq, 1997

BOULE, F. Calcul mental au quotidien, CRDP de Bourgogne, 2008

BOULE, F. ***Faites vos jeux à l'école*** [jeux numériques à construire, téléchargeables, 2005]
www.editionsdidier.com > publications numériques > mathématiques

FAYOL, M. *L'enfant et le nombre*, Delachaux et Niestlé, 1990

KUNTZMANN, J. *Calcul mental de 10 à 90 ans*, IREM de Grenoble, 1987

LETHIELLEUX, C. *Le calcul mental*, (2 vol.)A. Colin, 1992-93.